Laurent PUJO-MENJOUET
pujo@math.univ-lyon1.fr
BRACONNIER - BUREAU 246

Equations aux dérivées partielles appliquées à la biologie et la médecine

Partie 1 : équations paraboliques (équations de réaction-diffusion)

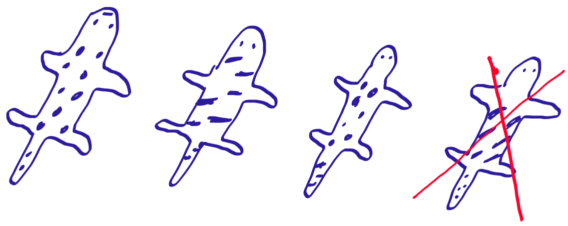
Partie 2 : équations hyperboliques (équations de type transport) et équations différentielles à retard

Partie 1 : équations de réaction-diffusion

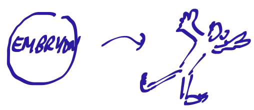
Référence : JAMES MURRAY (vol 1 & vol 2)

I Les structures de Turing

Introduction : dans un contexte biologique, les systèmes de réaction-diffusion ont été introduits en 1952 par ALAN TURING pour étudier la MORPHOGENÈSE (apparition de formes dans l'embryon)



au cours de laquelle des formes semblent "apparaître" à "partir de rien"



Turing a montré que ce type d'émergence de forme peut avoir lieu dans les systèmes assez simples, comme des mélange d'espèces chimique (qu'on appelle MORPHOGÈNES) soumis à de la DIFFUSION et de la RÉACTION.

Les formes dites STRUCTURES DE TURING (TURING PATTERNS)

Les formes dites STRUCTURES DE TURING (TURING PATTERNS) ont été utilisées depuis les années 70 dans de nombreux travaux de BIOMATHS : tâches sur le pelage, problème d'écologie, population, ...
Toutefois avant de passer aux systèmes d'équations de réaction diffusion commençons par <u>étudier une seule équation</u> :

1. Equation de diffusion

L'équation type décrivant les phénomènes diffusifs est la suivante :

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} u(t,x) = d . \Delta u(t,x)}$$

équation de <u>la CHALEUR</u> historiquement

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} u(t,x)}$$

équation de la CHALEUR historiquement introduite par <u>FOURIER</u>

u : quantité de chaleur qui se diffuse

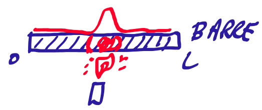
t : temps

x : espace $\quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^N \quad N=1,2,3$ (ici on étudiera $N=1$)

↳ c'est à dire quand $\Omega=[0,L]$

$L>0$

<u>dimension 1</u> :



$\frac{\partial}{\partial t}$: dérivée partielle par rapport au temps t

Δ : LAPLACIEN opérateur de diffusion : en 1D : $\boxed{\Delta u(t,x) = \frac{\partial^2}{\partial^2 x} u(t,x)}$

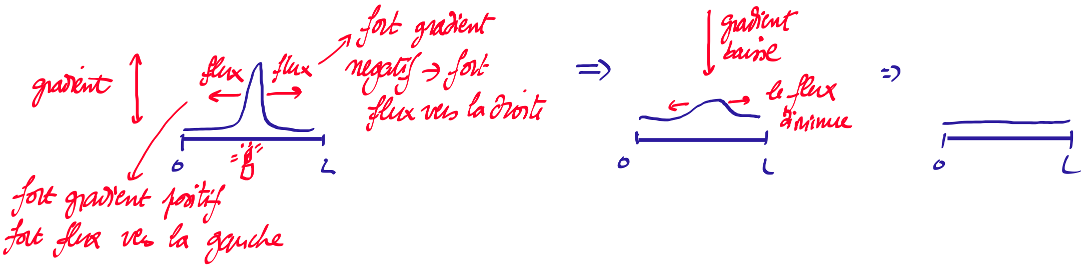
en 2D : $\Delta u(t,x) = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} u(t,x) + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} u(t,x)$

$x = \binom{x_1}{x_2}$

$= (^x_{\ 1_2}$

d. : $d>0$ COEFFICIENT DE DIFFUSION

Définition : La diffusion est un phénomène pour lequel le flux est proportionnel au gradient



La diffusion "APLATIT LES BOSSES" d'autant plus vite qu'elles sont hautes et que d est grand ($d>0$)

Question : que se passe-t-il si $d<0$?

on a alors un phénomène d'agrégation ou concentration

$d<0$

$\alpha < 0$ 

Remarque : dans ce cours on n'étudiera que le phénomène de diffusion c'est à dire $\boxed{\alpha > 0}$

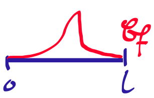
Etude de cette équation en 1D :

L'équation de diffusion s'écrit $\frac{\partial}{\partial t} u(t,x) = \alpha . \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t,x)$ $\quad t \geq 0$ et $x \in [0,L]$, $L>0$

a. **Conditions aux limites :**

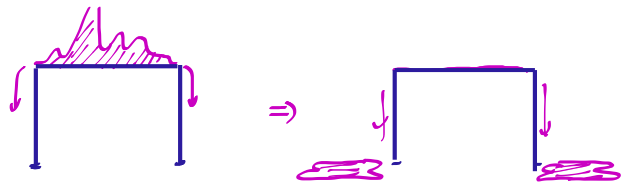
Pour que ce problème soit complet il est nécessaire de préciser :

① . quelle est la condition initiale : $u(0,x) = f(x)$, $x \in [0,L]$



② . quelles sont les conditions aux bords :

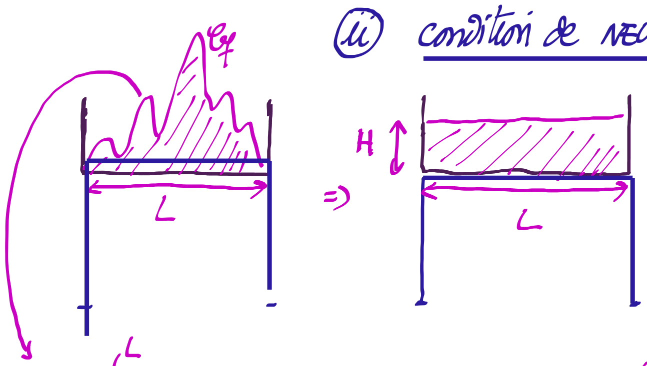
(i) . condition de DIRICHLET HOMOGÈNE



$$\boxed{u(t,0) = u(t,L) = 0}$$

$$\lim_{t \to +\infty} u(t,x) = 0$$

(ii) <u>condition de NEUMANN HOMOGÈNE</u>



$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x} u(t,0) = \frac{\partial}{\partial x} u(t,L) = 0}$$

conservation de la <u>MASSE</u>

$$\int_0^L f(t,x)\,dx = H.L \quad \Rightarrow \quad H = \frac{1}{L}\int_0^L f(t,x)\,dx$$

<u>Le problème est désormais complet:</u>

$$(S) \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{\partial}{\partial t} u(t,x) = d.\,\Delta u(t,x) & t \geq 0,\ x \in [0,L] \\ + \text{ condition initiale: } u(0,x) = f(x) & x \in [0,L] \\ + \text{ conditions aux bords (NEUMANN ou DIRICHLET HOMOGÈNE)} & \end{array} \right.$$

Question : comment résoudre ce système ?

Pour ça, on introduit un outil mathématique appelé FONCTION PROPRE

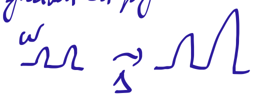
6. Fonctions propres

Définition On appelle fonction propre de l'opérateur Δ, que l'on note ω pour les conditions aux bords définies (NEUMANN ou DIRICHLET) un profil spatial (ou une forme) (c'est une fonction qui ne dépend que de x (espace)) ici c'est $\omega : x \mapsto \omega(x)$ tel que :

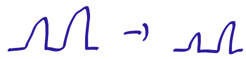
1. ω est dérivable 2 fois sur $[0,L]$
2. $\omega \not\equiv 0$ sur $[0,L]$ (ω n'est pas nul partout sur $[0,L]$)
3. ω vérifie les CONDITIONS AUX BORDS
4. $\Delta \omega(x) = \lambda \omega(x)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ (si $\lambda > 1$: amplification du profil

④ $\Delta w(x) = \lambda w(x)$, $\lambda \in \mathbb{R}$

(si $\lambda > 1$: amplification du profil



si $0 < \lambda < 1$: diminution du profil



Remarque : w est défini à une <u>constante multiplicative près</u>

c'est à dire $w(x)$ ou $k w(x)$ désignent la même fonction propre ($k \neq 0$)

<u>en effet</u> d'après ④ $\underbrace{\Delta}_{\text{dérivée 2nde}} k w(x) = \cancel{k} \Delta w(x) = \lambda \cancel{k} w(x)$

Remarque : λ est appelée VALEUR PROPRE associée à w (la fonction propre)

Exercice : On considère $x \in [0,L]$ avec les conditions de DIRICHLET HOMOGÈNE

① Calculer les fonctions propres de Δ associées à ce problème, ainsi que les valeurs propres

② Dessiner les premières fonctions propres

Solution : on cherche des fonctions w, 2 fois dérivable sur $[0,L]$, telle que $w \not\equiv 0$ sur $[0,L]$ vérifiant : DIRICHLET HOMOGÈNE : $w(0)=0$ et $w(L)=0$

et $\Delta w(x) = \lambda w(x)$ ici $\Delta w(x) = w''(x)$

donc on a $\boxed{w''(x) = \lambda w(x)}$ ←

Autrement dit on résout w t.q. $\begin{cases} w''(x) = \lambda w(x) & \text{pour } x \in [0,L] \\ w(0) = w(L) = 0 & \text{et } w \not\equiv 0 \text{ sur } [0,L] \end{cases}$

Rappel : on cherche les solutions sous la forme e^{rx} avec $r \in \mathbb{C}$

si $w(x) = e^{rx}$ alors $w'(x) = re^{rx}$ et $w''(x) = r^2 e^{rx}$

donc $w''(x) = \lambda w(x) \iff r^2 e^{rx} = \lambda e^{rx}$ pour tout $x \in [0,L]$

$\iff (r^2 - \lambda) e^{rx} = 0$

$\iff \boxed{r^2 - \lambda = 0}$ ou encore $\boxed{r^2 = \lambda}$ polynôme caractéristique

$\boxed{\text{CAS 1}}$ $\boxed{\text{Si } \lambda > 0}$ alors $r^2 = \lambda$ possède 2 solutions $\boxed{r_1 = \sqrt{\lambda}}$ et $r_2 = -\sqrt{\lambda}$

On a alors 2 solutions linéairement indépendantes $e^{r_1 x}$ et $e^{r_2 x}$ (où $\boxed{r_1 = -r_2}$)

Dans ce cas là, les solutions w sont données par

$w(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}$ pour tout $x \in [0,L]$

et on calcule c_1 et c_2 grâce aux conditions aux bords : $w(0) = w(L) = 0$ (DIRICHLET)

• $w(0)=0 \iff c_1 e^{r_1\cdot 0}+c_2 e^{r_2 0}=0$

$\iff c_1 + c_2 = 0$

$\iff \boxed{c_1 = -c_2}$

On a alors $w(x) = c_1 e^{r_1 x} - c_1 e^{-r_1 x}$

$= c_1 (e^{r_1 x} - e^{-r_1 x})$

• $w(L)=0 \iff c_1 (e^{r_1 L} - e^{-r_1 L}) = 0$

si $c_1=0$ alors $w(x)=0$ partout

IMPOSSIBLE CAR $w \not\equiv 0$

$e^{r_1 L} - e^{-r_1 L} = 0$

$\iff e^{r_1 L} = e^{-r_1 L}$

$\iff e^{r_1 L} = \frac{1}{e^{r_1 L}} \iff (e^{r_1 L})^2 = 1$

$\iff r_1 L = 0$

PAR HYP. $\underline{L>0}$!

$r_1 = \sqrt{\lambda}$, $\lambda>0$
$\neq 0$

$\underline{\text{PAS POSSIBLE}}$

le cas 1 : $\boxed{\lambda>0}$ n'a pas de solution

$\boxed{\text{CAS 2}}$: $\boxed{\lambda=0}$

Alors $w''(x) = \lambda w(x) = 0$ (car $\lambda=0$)

on doit résoudre $w''(x)=0$ c'est à dire $w'(x)=c_1$

et donc $\boxed{w(x) = c_1 x + c_2}$

c_1 et c_2 sont déterminées par les conditions aux bords:

• $w(0)=0 \iff c_1\cdot 0 + c_2 = 0$

$\iff \boxed{c_2 = 0}$

donc $w(x) = c_1 x$

D'autre part

• $w(L)=0 \iff c_1 L = 0$ or $L>0$ et si $c_1=0$ alors $w\equiv 0$ PAS POSSIBLE

le $\underline{\text{cas 2}}$: $\lambda=0$ n'a pas de solution

$\boxed{\text{CAS 3}}$ $\boxed{\text{si } \lambda<0}$ comme $r\in\mathbb{C}$ on a alors $r^2 = \overset{<0}{\lambda}$ donc $r^2 = -|\lambda|$

$r^2 = i^2|\lambda|$

on a alors 2 solutions $r_1 = i\sqrt{|\lambda|}$ et $r_2 = -i\sqrt{|\lambda|}$

c'est à dire que $r_1 = \bar{r}_2$

$\underline{\text{Rappel}}$: si $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \bar{r}_1 = \alpha - i\beta$ alors $w(x) = c_1 e^{(\alpha+i\beta)x} + c_2 e^{(\alpha-i\beta)x}$

et on peut se ramener, à $w(x) = e^{\alpha x}(c_1 \cos(\beta x) + c_2 \sin(\beta x))$

et on peut se ramener, à $\omega(x) = e^{\alpha x}(c_1\cos(\beta x) + c_2\sin(\beta x))$

Ici : $r_1 = i\sqrt{|\lambda|}$ de la forme $\alpha + i\beta$ avec $\alpha = 0$ et $\beta = \sqrt{|\lambda|}$

on applique alors la formule :

$$\omega(x) = \underbrace{e^{0}}_{1}\left(c_1\cos\left(\sqrt{|\lambda|}\cdot x\right) + c_2\sin\left(\sqrt{|\lambda|}\cdot x\right)\right)$$

$$= c_1\cos\left(\sqrt{|\lambda|}\,x\right) + c_2\sin\left(\sqrt{|\lambda|}\,x\right)$$

On calcule c_1 et c_2 en fonction des conditions aux bords :

on obtient • $\omega(0) = c_1\underbrace{\cos(0)}_{1} + c_2\underbrace{\sin(0)}_{=0} = 0$

$\Leftrightarrow \boxed{c_1 = 0}$

Donc $\omega(x) = c_2\sin\left(\sqrt{|\lambda|}\cdot x\right)$

• $\omega(L) = 0 \Leftrightarrow c_2\sin\left(\sqrt{|\lambda|}\cdot L\right) = 0$ si $c_2 = 0$ alors $\omega \equiv 0$ IMPOSSIBLE

$\Leftrightarrow \sin\left(\sqrt{|\lambda|}\cdot L\right) = 0$

$\Leftrightarrow \underbrace{\underbrace{\sqrt{|\lambda|}}_{>0}\cdot \underbrace{L}_{L>0}}_{>0} = k\pi$ $\quad k \in \mathbb{Z}$, $\lambda < 0$, $\pi > 0$

k doit être > 0 donc $\boxed{k \in \mathbb{N}^*}$ $(k = 1, 2, 3, 4, \ldots)$

$\Leftrightarrow \sqrt{|\lambda|} = \frac{k\pi}{L}$ donc $|\lambda| = \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2$

$\lambda < 0$ ↪ $-\lambda = \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2$

donc $\boxed{\lambda = -\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2}$, $k \in \mathbb{N}^*$

on a une infinité dénombrable de valeurs propres λ, on les note λ_k, $k \in \mathbb{N}^*$

et les fonctions propres sont données par

$\omega(x) = c_2\sin\left(\sqrt{|\lambda|}\cdot x\right)$ où $\sqrt{|\lambda|} = \frac{k\pi}{L}$)

$\omega(x) = c_2\sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right)$, $k \in \mathbb{N}^*$

on rappelle que les fonctions propres sont données à une constante multiplicative près.
Autrement dit, sans perte de généralité on prend $c_2 = 1$

Conclusion : les fonctions propres de Δ avec les conditions de Dirichlet homogène fonctions propres de Δ avec les conditions de Dirichlet homogène

sont $\boxed{\omega_k(x) = \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right), \ k \in \mathbb{N}^*}$

et les valeurs propres associées $\boxed{\lambda_k = -\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2}$

2. Dessinons les premiers fonctions propres

$k = 1, 2, 3, 4, \dots$ $\boxed{k=1}$ $\boxed{k=2}$

$\omega_1(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$ $\omega_2(x) = \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)$

$x = 0$ y

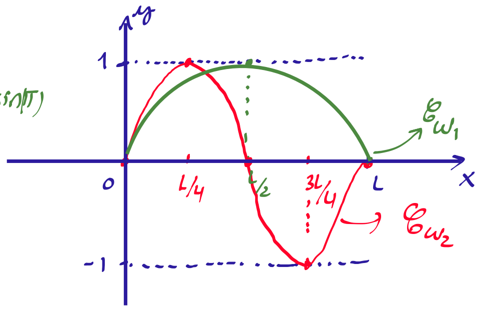
si $x = 0$ $\sin(0) = 0$

si $x = L$ $\sin\left(\frac{2\pi L}{L}\right) = \sin(2\pi) = 0$

$\underset{}{\sin(0)} = 0$

$x = L$ $\sin\left(\frac{\pi L}{L}\right) = \sin(\pi)$

$x = L/2$ $\sin\left(\frac{\pi L}{2L}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$



si $x = L$ $\sin\left(\frac{2\pi L}{L}\right) = \sin(2\pi) = 0$

si $x = L/2$ $\sin\left(\frac{2\pi . L}{2L}\right) = \sin(\pi) = 0$

si $x = L/4$ $\sin\left(\frac{2\pi . L}{4L}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$

si $x = \frac{3L}{4}$ $\sin\left(\frac{2\pi . 3L}{L4}\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1$

Remarque $k \in \mathbb{N}^*$ est également appelée FRÉQUENCE des oscillations de w_k !

Exercice : pour le 9 décembre : mêmes questions mais avec NEUMANN (au lieu de DIRICHLET)

c. Résolution de l'équation de diffusion :

On rappelle que l'on a

$$(S)\ \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} u(t,x) = d\,\Delta u(t,x) \\ + \text{c.i } u(0,x) = f(x) \quad , x \in [0,L] \\ + \text{c.aux bords Dirichlet ou Neumann} \end{cases}$$

(i) si la condition initiale est une fonction propre $w_k(x)$ (de Δ satisfaisant les conditions aux bords)

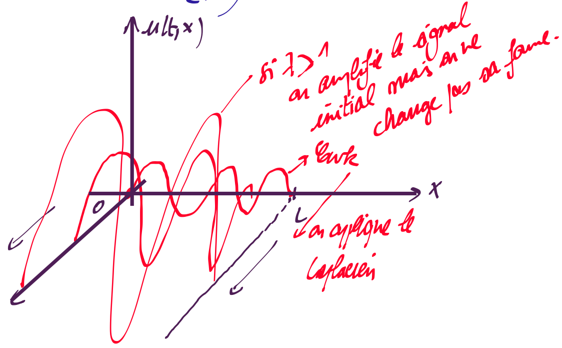
On suppose donc que $u(0,x) = w_k(x) \quad x \in [0,L] \quad (w_k \neq 0)$

équation : $\dfrac{\partial}{\partial t} u(t,x) = d.\ \Delta u(t,x)$

$u(0,x) = w_k(x)$

$\Delta u(t,x)$

$\Delta\, \underline{w_k(x)}$



la forme reste inchangée, elle sera juste "amplifiée" ou "diminuée" au cours du temps au cours du temps.

ASTUCE : on cherche la solution sous la forme suivante:

$$u(t,x) = \underbrace{\alpha(t)}_{\text{coefficient d'amplification au cours du temps}} w_k(x)$$

on a séparé les variables t et x : c'est la méthode de séparation des variables.

avec $\boxed{u(t,x) = \alpha(t)\, w_k(x)}$ → fonction propre,

l'équation de diffusion s'écrit alors: $\frac{\partial}{\partial t} u(t,x) = d\,\Delta u(t,x)$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial t}\left(\alpha(t) w_k(x)\right) = d\,\Delta\left(\alpha(t) w_k(x)\right)$$

$$\Leftrightarrow w_k(x) . \alpha'(t) = d\,\alpha(t)\, \Delta w_k(x)$$

$$\Leftrightarrow w_k(x)\,\alpha'(t) = d\alpha(t) . \lambda_k w_k(x)$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{w_k(x)}_{\neq 0}\left(\alpha'(t) - \lambda_k d\,\alpha(t)\right) = 0 \quad \text{pour } t \geq 0 \text{ et pour tout } x \in [0,L]$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\alpha'(t) - \lambda_k d\,\alpha(t) = 0}$$ équation différentielle

$$\Leftrightarrow \boxed{\alpha(t) = \alpha(0)\, e^{d\lambda_k t}}$$

Rappel $x' + ax = 0$ on multiplie par $e^{\int a\,dt} = e^{at}$

$\Leftrightarrow e^{at} x' + a e^{at} x = 0$

$\Leftrightarrow (e^{at} x)' = 0$

$\Leftrightarrow e^{at} x = c$

$\Leftrightarrow x(t) = c\, e^{-at}$ ici $a = -\lambda_k d$.

et $c = \alpha(0)$

Par conséquent:

$u(t,x) = \alpha(t)\, w_k(x)$

s'écrit

$$\boxed{u(t,x) = \alpha(0)\, e^{d\lambda_k t} w_k(x)}$$

Si on a Dirichlet $w_k(x) = \sin\left(\frac{k\pi}{L}\right)$ et $\lambda_k = -\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2$

(exercice précédent)

Que vaut $\alpha(0)$ = ?

- on pose $t=0$ $u(0,x) = \alpha(0)\, \overset{1}{\underset{\shortparallel}{e^{0}}} w_k(x) = \alpha(0) w_k(x)$

mais par hypothèse $u(0,x) = w_k(x)$

$\alpha(0) w_k(x) = w_k(x)$

donc $\boxed{\alpha(0) = 1}$

Conclusion : la solution de l'équation de diffusion quand la condition initiale est une fonction propre $w_k(x)$ est donnée par:

$$\boxed{u(t,x) = e^{d.\lambda_k t} w_k(x)}$$

Remarque : si la condition aux bords est Dirichlet, on a $u_k(x) = \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right)$ $k \in \mathbb{N}^*$

et $\lambda_k = -\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2$

donc $u(t,x) = e^{\underbrace{-\overset{\alpha>0}{\alpha}\cdot\overbrace{\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2}^{>0} t}_{\downarrow t\to+\infty}} \underbrace{\sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right)}_{\text{borné compris entre } -1 \text{ et } 1}$

$\lim_{t\to+\infty} u(t,x) = 0$.

Exercice : quelle est la limite quand on a du Neumann homogène ? pour le 9 décembre

Exercice : pour le 9 décembre

Chercher les fonctions propres de Δ sur $[0,L]$ avec $w'(0)=0$ et $w(L)=0$ (examen)

Dirichlet à droite

NEUMANN à gauche

(ii) si la condition initiale est la combinaison linéaire de 2 fonctions propres

On suppose ici que $u(0,x) = \alpha_{k_1} w_{k_1}(x) + \alpha_{k_2} w_{k_2}(x)$ $\quad \alpha_{k_1}$ et $\alpha_{k_2} \in \mathbb{R}$

On utilise, ce qu'on appelle en mathématiques, le principe de superposition :

la solution $u(t,x)$ est donnée par la combinaison de chacune des solutions si la condition initiale est une seule fonction propre c'est à dire :

$$u(t,x) = \underbrace{\alpha_{k_1} e^{d\lambda_{k_1} t} w_{k_1}(x)}_{\text{une seule fonction propre}} + \underbrace{\alpha_{k_2} e^{d\lambda_{k_2} t} w_{k_2}(x)}_{\text{une seule fonction propre}}, \quad t \geq 0 \text{ et } x \in [0,L].$$