CM2
12 JANVIER 2026

5. Comment résoudre un système de 2 équations à 2 inconnues

(avec les vecteurs & les matrices)

On considère le système suivant :

$$\begin{cases} a x_1 + b x_2 = k_1 & (1) \\ c x_1 + d x_2 = k_2 & (2) \end{cases}$$

<u>Objectif</u> : trouver x_1 et x_2 (les inconnues) en fonction de a, b, c, d, k_1 et $k_2 \in \mathbb{R}$ (donnés)

$\boxed{\text{CAS 1}}$. $\boxed{\text{Si } c = 0}$

$a x_1 + b x_2 = k_1$

$d x_2 = k_2$ → si $d = 0$

→ si $k_2 = 0$ on a une infinité de solutions (on peut prendre ce qu'on veut pour x_2)

→ si $k_2 \neq 0$: $0 = k_2 \neq 0$ impossible
PAS DE SOLUTION

→ si $d \neq 0$ on a $\boxed{x_2 = \frac{k_2}{d}}$

et on remplace x_2 par $\frac{k_2}{d}$ dans l'equation (1)

$a x_1 + b \cdot \frac{k_2}{d} = k_1 \iff a x_1 = k_1 - b \frac{k_2}{d}$

$k_1 - b \frac{k_2}{d}$

$x_2 \nearrow$

↳ si $a=0$, • si $k_1 - b\frac{k_2}{d} = 0$

on a une infinité de solutions

on met ce qu'on veut pour x_1

• si $k_1 - b.\frac{k_2}{d} \neq 0$

on a $0.x_1 = k_1 - b.\frac{k_2}{d} \neq 0$

IMPOSSIBLE - PAS DE SOLUTION

↳ si $a \neq 0$ on a $\boxed{x_1 = \frac{1}{a}\left(k_1 - b\frac{k_2}{d}\right)}$

CAS 2 | si $c \neq 0$ | on utilise la méthode du <u>PIVOT DE GAUSS</u>

<u>idée</u>

On rappelle l'équation

$$\begin{cases} ax_1 + bx_2 = k_1 & (1) \\ cx_1 + dx_2 = k_2 & (2) \end{cases}$$

<u>Méthode</u> : On cherche à "éliminer" x_1 dans la ligne (2):

Pour ça: on écrit la ligne (1) de nouveau: $\boxed{ax_1 + bx_2 = k_1 \quad (1)}$

on multiplie la ligne (2) par $-\frac{a}{c}$ et on a: $-\frac{a}{\cancel{c}}.\cancel{c}.x_1 - \frac{a}{c}dx_2 = -\frac{a}{c}.k_2$ (2)

on obtient: $\boxed{-ax_1 - \frac{a}{c}.dx_2 = -\frac{a}{c}k_2}$ (3)

et on fait (1)+(3): on obtient $\boxed{0 + \left(b - \frac{a}{c}.d\right)x_2 = k_1 - \frac{a}{c}k_2}$ (4)

On garde la ligne (1) et on change dans le système la ligne (2) en ligne (4)

On a alors le système:

$$\begin{cases} ax_1 + bx_2 = k_1 \\ \left(b - \frac{a}{c}d\right)x_2 = k_1 - \frac{a}{c}k_2 \end{cases}$$

on modifie "légèrement (4)": $\left(b - \frac{a}{c}d\right)x_2 = k_1 - \frac{a}{c}k_2$

$$\Leftrightarrow \left(c.\frac{b}{c} - \frac{a}{c}.d\right)x_2 = \frac{c.k_1}{c} - \frac{a}{c}k_2$$

$$\Leftrightarrow \cancel{\frac{1}{c}}(bc - ad)\,x_2 = \cancel{\frac{1}{c}}(ck_1 - ak_2)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{(bc - ad)\,x_2 = (ck_1 - ak_2)} \quad (4)$$

si $\boxed{bc - ad \neq 0}$ on a $\boxed{x_2 = \frac{ck_1 - ak_2}{bc - ad}}$

bc

Remarque : le système $\begin{cases} ax_1 + bx_2 = k_1 \\ cx_1 + dx_2 = k_2 \end{cases}$ peut s'écrire $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}$

On note $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ alors $tr(A) = a+d$

$\boxed{det(A) = ad - cb}$ $\rightarrow$ $bc - ad \neq 0 \Leftrightarrow det(A) \neq 0$

On a $x_2 = \dfrac{ck_1 - ak_2}{bc - ad}$ (avec $det(A) \neq 0$)

$det(A) = ad - cb$
donc
$-det(A) = bc - ad$

$$= \frac{ck_1 - ak_2}{-det(A)}$$

$$= \frac{-(ck_1 - ak_2)}{det\ A}$$

$$= \boxed{\frac{-ck_1 + ak_2}{det(A)}}$$

On cherche ensuite x_1 : (1) $ax_1 + bx_2 = k_1$ avec $x_2 = \dfrac{-ck_1 + ak_2}{det(A)}$

$$(1) \Leftrightarrow ax_1 + b.\frac{-ck_1 + ak_2}{det(A)} = k_1$$

$$\Leftrightarrow ax_1 = k_1 - b.\frac{(-ck_1 + ak_2)}{det(A)}$$

$det(A) = ad - cb$

$$ax_1 = k_1 - \frac{b(-ck_1 + ak_2)}{ad - cb}$$

$$= \frac{k_1(ad - cb)}{ad - cb} - b\frac{(-ck_1 + ak_2)}{ad - cb}$$

$$\Leftrightarrow ax_1 = \frac{k_1 ad - \cancel{k_1 cb} + \cancel{bck_1} - abk_2}{ad - cb}$$

$$\Leftrightarrow ax_1 = \frac{k_1 ad - k_2 ab}{ad - cb}$$

$\boxed{\text{Si } a \neq 0}$ $\Leftrightarrow \cancel{a}x_1 = \dfrac{\cancel{a}(k_1 d - k_2 b)}{ad - cb}$

$$\Leftrightarrow \boxed{x_1} = \frac{k_1 d - k_2 b}{ad - cb} = \boxed{\frac{k_1 d - k_2 b}{det(A)}}$$

$ad - cb = det(A)$

Pour résumer : si $c \neq 0$, $a \neq 0$ et $det(A) \neq 0$

alors $x_1 = \dfrac{k_1 d - k_2 b}{det(A)}$ et $x_2 = \dfrac{-k_1 c + k_2 a}{det(A)}$

on peut écrire : $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} k_1 d - k_2 b \\ -k_1 c + k_2 a \end{pmatrix}$ $\rightarrow$ $\begin{pmatrix} k.x_1 \\ k.x_2 \end{pmatrix} = k.\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

Remarque : on a $\begin{cases} ax_1 + bx_2 = k_1 \\ cx_1 + dx_2 = k_2 \end{cases}$ qu'on peut écrire $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}$

on remarque que la solution s'écrit $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\det A} \cdot \boxed{\begin{pmatrix} k_1 d - k_2 b \\ -k_1 c + k_2 a \end{pmatrix}}$

↳ on peut l'écrire sous forme d'une matrice × vecteur

$\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}$

NOTATION : on note $A' = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$, elle s'appelle MATRICE ADJOINTE de $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

Remarque on passe de $A \rightarrow A'$

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

Conclusion : la solution du système $\begin{cases} ax_1 + bx_2 = k_1 \\ cx_1 + dx_2 = k_2 \end{cases}$ qu'on écrit $A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}$ avec $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

s'écrit : (si $c \neq 0$, $\det(A) \neq 0$ et $a \neq 0$)

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\det A} \cdot A' \cdot \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad A' = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

En mathématiques : on peut montrer que l'inverse de la matrice A notée A^{-1} est exactement $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A'$

$A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}$ $\quad A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot A'$

Exercice : Résoudre $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 4 \\ 3x_1 + 4x_2 = 5 \end{cases}$

. le système s'écrit : $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$

$\Big)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$

on pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. $\boxed{\det(A) = -2} \neq 0$ $\quad c = 3 \neq 0 \quad a = 1 \neq 0$

alors $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\det A} \cdot A' \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ avec $A' = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

et donc $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4.4 - 2.5 \\ -3.4 + 1.5 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 16 - 10 \\ -12 + 5 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 6 \\ -7 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} -6/2 \\ 7/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 7/2 \end{pmatrix}$$

<u>Exercice</u> (pour mercredi) : • Résoudre $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 1 \\ 5x_1 + 2x_2 = 4 \end{cases}$

• <u>Résoudre</u> $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 1 \\ 0x_1 + 2x_2 = 4 \end{cases}$

<u>Remarque</u> : écrire $\begin{cases} ax_1 + bx_2 = k_1 \\ cx_1 + dx_2 = k_2 \end{cases}$ peut s'écrire $\boxed{A.X = K}$

où $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $\quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ $\quad K = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}$

et la solution s'écrit (si $\det(A) \neq 0$...) $\boxed{X = A^{-1}K}$ avec $A^{-1} = \frac{1}{\det A} . A'$

<u>Question</u> : comment résoudre $AX = \lambda X$ ici $\lambda \in \mathbb{R}$

avec $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

On suppose que $X \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

<u>Remarque</u> : quand on a : $ax = \lambda x \iff (a - \lambda)x = 0$ dans le réel

Est-ce qu'on peut le faire avec les matrices et les vecteurs ?

<u>Réponse</u> : pas tout à fait :

$$\underset{\text{matrice}}{A} . \underset{\text{vecteur}}{X} - \underset{\text{nombre}}{\lambda} \underset{\text{vecteur}}{X} = 0 \overset{??}{\iff} (\underset{\text{une matrice}}{A} - \underset{\text{un nombre}}{\lambda}) X = 0$$

: on a pas le droit de faire MATRICE − NOMBRE

Pour avoir (MATRICE − MATRICE)

Pour avoir (MATRICE - MATRICE) on va utiliser une astuce: faire

ce qu'on veut c'est trouver une matrice M telle que $\boxed{\lambda . MX = \lambda X}$

de telle sorte que $AX = \lambda X$ s'écrit $AX = \lambda MX \Leftrightarrow (A - \lambda M)X = 0$

matrice - matrice

Réponse : si $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$: matrice identité on la note $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} . X \underset{\text{si } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}{=} \lambda . \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \lambda . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \lambda X$$

L'équation $AX = \lambda X \Leftrightarrow AX = \lambda . I . X$ où $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow AX - \lambda I X = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{(A - \lambda I) X = 0}$$

or $A - \lambda I = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{pmatrix}$$

Donc $(A - \lambda I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{pmatrix} X = 0$ on rappelle que $X \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ on a $\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a - \lambda) x_1 + b x_2 = 0 & (1) \\ c x_1 + (d - \lambda) x_2 = 0 & (2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a - \lambda) x_1 + b x_2 = 0 & (1) \\ c x_1 = -(d - \lambda) x_2 \end{cases}$$

on suppose $c \neq 0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} (1) \\ x_1 = -\dfrac{(d - \lambda)}{c} x_2 & (3) \end{cases}$

On remplace x_1 de (3) dans l'équation (1)

$(a - \lambda) . \dfrac{(d - \lambda)}{} \quad b x_2$

on a : $-(a-\lambda)\cdot\left(\frac{(d-\lambda)}{c}x_2\right)+bx_2=0$

$$\Leftrightarrow \left(-\frac{1}{c}(a-\lambda)(d-\lambda)+b\right)x_2=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{-1}{c}(a-\lambda)(d-\lambda)+\frac{cb}{c}\right)x_2=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{c}\left(-(a-\lambda)(d-\lambda)+cb\right)x_2=0$$

$$\Leftrightarrow \left(-(a-\lambda)(d-\lambda)+cb\right)x_2=0 \quad \text{or } X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

on suppose $x_2\neq 0$

donc il reste $-(a-\lambda)(d-\lambda)+cb=0$

$$\Leftrightarrow cb-(a-\lambda)(d-\lambda)=0$$

$$\Leftrightarrow -\det(A-\lambda I)=0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\det(A-\lambda I)=0}$$

↗ une condition pour résoudre le système est que $\det(A-\lambda I)=0$ .... À SUIVRE...

Remarque $A-\lambda I=\begin{pmatrix}a-\lambda & b\\ c & d-\lambda\end{pmatrix}$

$\det(A-\lambda I)=(a-\lambda)(d-\lambda)-bc$

$-\det(A-\lambda I)=cb-(a-\lambda)(d-\lambda)$

III <u>Systèmes d'équations différentielle</u>

On considère le système d'équations différentielles <u>linéaires</u> suivant

$$(S)\begin{cases}x_1'(t)=ax_1(t)+bx_2(t)\\ x_2'(t)=cx_1(t)+dx_2(t)\end{cases}$$

qu'on peut écrire sous la forme:

$$\begin{pmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{pmatrix}'=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{pmatrix}$$

et en posant $X(t)=\begin{pmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{pmatrix}$ et $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$

le système s'écrit $\boxed{X'(t)=A.X(t)}$

<u>Rappel de L_2</u> (SPS) : quand on a $x'(t)=ax(t)$ en dimension 1 (pas de matrice) on a vu que la <u>solution</u> s'écrivait

on a vu que la solution s'écrivait

$$\boxed{x(t) = c.\, e^{\lambda t}}$$

Méthode dans le cas des systèmes:

l'idée est de chercher les solutions de $X'(t) = A.X(t)$ sous la forme

$X(t) = e^{\lambda t} V$ ← vecteur avec $V \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et λ (lambda) est un nombre

Remarque : attention λ peut être un nombre réel ($\in \mathbb{R}$) ou complexe ($\in \mathbb{C}$)

$\lambda = a + ib$, $i^2 = -1$
partie réelle, partie imaginaire

et V peut aussi être un vecteur réel ou à composantes complexes

On cherche les solutions $X(t)$ sous la forme $X(t) = e^{\lambda t} V$

que vaut $X'(t) = \lambda e^{\lambda t} . V$ $\quad (e^{u(t)})' = u'(t) e^{u(t)}$

et on remplace dans l'équation : $X'(t) = A X(t)$

$$\Leftrightarrow \lambda e^{\lambda t} V = A.\, e^{\lambda t} V$$

$$\Leftrightarrow A e^{\lambda t} V - \lambda e^{\lambda t} V = 0$$

$$\Leftrightarrow e^{\lambda t}(AV - \lambda V) = 0 \text{ pour tout } t \in I \subset \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{AV - \lambda V = 0} \quad \text{avec } V \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow AV - \lambda I V = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{(A - \lambda I) V = 0}$$

$X' = AX$
$X = e^{\lambda t} V$

d'après ce qui précède c'est équivalent à résoudre

$$\boxed{\det(A - \lambda I) = 0}$$

Rappel : si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ alors $A - \lambda I = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{pmatrix}$$

Comment trouver λ à partir de l'équation $\boxed{\det(A - \lambda I) = 0}$?

Réponse en écrivant $\det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \det\begin{pmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{pmatrix}$

Réponse en écrivant $\det(A-\lambda I)=0 \Leftrightarrow \det\begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix}=0$

$\Leftrightarrow (a-\lambda)(d-\lambda)-bc=0$

$\Leftrightarrow ad \underline{-a\lambda} \underline{-\lambda d} + \lambda^2 - bc = 0$

$\Leftrightarrow \lambda^2-(a+d)\lambda+ad-bc=0$ polynôme de degré 2 en λ

Rappel

$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$tr(A)=a+d$

$\det(A)=ad-bc$

$\Leftrightarrow \boxed{\lambda^2-tr(A)\lambda+\det(A)=0}$

$\boxed{\Delta=tr(A)^2-4\det(A)}$

Rappel: $ax^2+bx+c=0$

$\Delta=b^2-4ac$

. si $\Delta>0$: $x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

. si $\Delta=0$ $x=\frac{-b}{2a}$

si $\Delta<0$: on verra ...

Remarque : • cette formule permet de trouver λ.

On pourra ensuite trouver V par la formule $\boxed{AV=\lambda V}$

• si $\Delta>0$ on a alors 2 solutions λ_1 et λ_2

et dans ce cas là on aura 2 vecteurs V_1 et V_2

Dans ce cas là, un résultat de mathématiques nous dit que toutes les solutions de $X'=AX$ s'écrivent alors

$$X(t)=k_1 . e^{\lambda_1 t}V_1+k_2e^{\lambda_2 t}V_2$$

si on pose $X_1(t)=e^{\lambda_1 t}V_1$ et $X_2(t)=e^{\lambda_2 t}V_2$ alors

$$\boxed{X(t)=k_1X_1(t)+k_2X_2(t)}$$

Les constantes k_1 et k_2 sont calculées à partir de la condition initiale:

$$\begin{cases} x_1(0)=x_{10} \\ x_2(0)=x_{20} \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1'(t)=ax_1(t)+bx_2(t) \\ x_2'(t)=cx_1(t)+dx_2(t) \end{cases}$$

Exercice : résoudre le système $(S)\begin{cases} x_1'(t)=x_1(t)+2x_2(t) \\ x_2'(t)=3x_1(t)+4x_2(t) \end{cases}$

Etape 1 : (S) s'écrit sous la forme: $X'(t)=AX(t)$ avec $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

étape 1 : (S) s'écrit sous la forme : $X'(t) = AX(t)$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

On cherche les solutions sous la forme $X(t) = e^{\lambda t} \cdot V$ où $V \neq \binom{0}{0}$

étape 2 : **Cherchons λ_1 et λ_2 :**

pour ça on utilise la formule : $\lambda^2 - tr(A)\lambda + det(A) = 0$

Calculons d'abord $tr(A) = 5$

$det(A) = -2$

donc le polynôme s'écrit $\boxed{\lambda^2 - 5\lambda - 2 = 0}$

$$\Delta = 25 + 8 = 33 > 0$$

on a alors 2 solutions $\lambda_1 = \frac{+5 - \sqrt{33}}{2}$ et $\lambda_2 = \frac{+5 + \sqrt{33}}{2}$

Remarque : on vient de trouver λ_1 et λ_2. Il resterait à trouver V_1 et V_2 par la formule $AV_1 = \lambda_1 V_1$ et $AV_2 = \lambda_2 V_2$

on le fera avec un exemple plus simple.

Retour au cours : pour la forme $\lambda^2 - tr(A)\lambda + det(A) = 0$

si $\Delta > 0$ on trouve 2 solutions $\lambda_1 = \frac{tr(A) - \sqrt{\Delta}}{2}$ et $\lambda_2 = \frac{tr(A) + \sqrt{\Delta}}{2}$

$\boxed{\Delta = tr(A)^2 - 4det(A)}$

Calculer $\lambda_1 + \lambda_2 = \frac{tr(A) - \sqrt{\Delta}}{2} + \frac{tr(A) + \sqrt{\Delta}}{2} = \frac{tr(A) \cancel{- \sqrt{\Delta}} + tr(A) \cancel{+ \sqrt{\Delta}}}{2} = \frac{2tr(A)}{2} = \boxed{tr(A)}$

$\lambda_1 \cdot \lambda_2 = \left(\frac{tr(A) - \sqrt{\Delta}}{2}\right)\left(\frac{tr(A) + \sqrt{\Delta}}{2}\right) = \frac{(tr(A) - \sqrt{\Delta})(tr(A) + \sqrt{\Delta})}{4} = \frac{trA^2 - \sqrt{\Delta}^2}{4}$

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$A = a + d$

$= \frac{trA^2 - (tr(A)^2 - 4detA)}{4}$

$= \frac{\cancel{trA^2} - \cancel{trA^2} + \cancel{4}detA}{\cancel{4}}$

$\boxed{\lambda_1 \lambda_2 = det(A)}$

---

19 JANVIER 2026

Rappel : But : résoudre et représenter graphiquement les solutions de :

$$\begin{cases} x_1'(t) = a x_1(t) + b x_2(t) \\ x_2'(t) = c x_1(t) + d x_2(t) \end{cases}$$

$\cdot \; x_2'(t) = c x_1(t) + d x_2(t)$

qu'on peut écrire sous la forme $X'(t) = A . X(t)$ où $X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

On a vu que si on cherche les solutions sous la forme $X(t) = e^{\lambda t} V$, avec $V \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

où $\lambda \in \mathbb{C}$, et $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ alors $X'(t) = A X(t)$

s'écrit
$$\lambda e^{\lambda t} V = A e^{\lambda t} V \quad \text{pour tout } t \in I \quad (t \geq 0 \text{ par exemple})$$
$$\Leftrightarrow \lambda V = A V$$
$$\Leftrightarrow AV - \lambda V = 0$$
$$\Leftrightarrow (A - \lambda I) V = 0 \quad \text{où} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } V \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \det(A - \lambda I) = 0$$

$\rightarrow$ l'objectif est alors de trouver d'abord λ puis V

$\rightarrow$ <u>Comment trouver λ</u>: on a vu précédemment que:
$$\det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - tr(A)\lambda + \det(A) = 0$$

C'est un polynôme de degré 2 en λ.

On a alors 3 cas: si $\boxed{\Delta = tr(A)^2 - 4\det(A) > 0}$

on a alors 2 solutions λ_1 et λ_2 réelles distinctes $\lambda_1 = \frac{tr(A) - \sqrt{\Delta}}{2}$

et $\lambda_2 = \frac{tr(A) + \sqrt{\Delta}}{2}$

On a vu que $\lambda_1 + \lambda_2 = tr(A)$ et $\lambda_1 \lambda_2 = \det(A)$

Quand on a trouvé λ_1 et λ_2 on calcule V_1 et V_2 t.q.

$$A V_1 = \lambda_1 V_1 \quad \text{et} \quad A V_2 = \lambda_2 V_2 \quad \text{avec } V_1 = \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\text{et } V_2 = \begin{pmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

<u>important</u>: alors les solutions de $X'(t) = AX(t)$ sont données par
$$X(t) = c_1 . e^{\lambda_1 t} V_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} V_2$$

et on trouve c_1 et c_2 en utilisant la condition initiale

$$X(0) = \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix}.$$

Retour au cours: Comment tracer les solutions de $X'(t) = AX(t)$

quand $\boxed{\Delta = tr(A)^2 - 4\det(A) > 0}$

Pour ça, on a encore besoin de faire quelques calculs:

On suppose qu'on a calculé λ_1 et λ_2 et $V_1 = \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{pmatrix}$ et $V_2 = \begin{pmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{pmatrix}$ les vecteurs associés.

Note: λ_1 et λ_2 sont appelés VALEURS PROPRES du système

et V_1 et V_2 " appelés VECTEURS PROPRES associés à λ_1 et λ_2

Définissons la matrice P suivante: $P = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{21} \\ v_{12} & v_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_1 & V_2 \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ V_1 & V_2 \end{array}$$

Exercice: si on pose $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, t.q. $AV_1 = \lambda_1 V_1$ et $AV_2 = \lambda_2 V_2$

Calculer $A.P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_{11} & v_{21} \\ v_{12} & v_{22} \end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_{11} & v_{21} \\ v_{12} & v_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} av_{11} + bv_{12} & av_{21} + bv_{22} \\ cv_{11} + dv_{12} & cv_{21} + dv_{22} \end{pmatrix}$$

or $AV_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} av_{11} + bv_{12} \\ cv_{11} + dv_{12} \end{pmatrix}$

et $AV_2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} av_{21} + bv_{22} \\ cv_{21} + dv_{22} \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} AV_1 & AV_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1 V_1 & \lambda_2 V_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} V_1 & V_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = P \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

↑ à vérifier en exercice

Pour résumer: on vient de montrer que $\boxed{AP = P.D}$ où $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$

↑ diagonale

Remarque: on pourrait montrer (pas fait) que P est inversible de matrice inverse P^{-1} et par la propriété des matrices inverses on a:

$$P.P^{-1} = I \quad \text{ou encore} \quad P^{-1}P = I$$

Ici on a $AP = P.D$ si on multiplie par P^{-1} à gauche

Ici on a $AP = P.D$ si on multiplie par P^{-1} à gauche on a

$$P^{-1}AP = P^{-1}.P.D$$
$$= I.D$$
$$\boxed{P^{-1}AP = D}$$

Remarque : on vient de trouver un moyen de passer de la matrice A à la matrice D :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}_{A} \xrightarrow{P^{-1}AP} \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}}_{D}$$

MÉTHODE :

- La matrice P s'appelle MATRICE de PASSAGE.

Dès qu'on a $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longrightarrow$ on calcule λ_1 et λ_2 puis V_1 et V_2 $\nearrow \begin{cases} AV_1 = \lambda_1 V_1 \\ AV_2 = \lambda_2 V_2 \end{cases}$

on en déduit $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} V_1 & V_2 \end{pmatrix}$

- La matrice D est beaucoup plus facile à manipuler que A !!

- <u>Comment procède-t-on en exercice de façon concrète ?</u>

- on a l'équation $X' = AX$ on calcule λ_1, λ_2 et V_1 et V_2

on en déduit $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} V_1 & V_2 \end{pmatrix}$

① on pose $\boxed{X = PY}$ où $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ inconnue

alors $X' = P.Y'$ or $X' = AX$

et donc on a $AX = PY'$

② on multiplie par P^{-1} : on obtient

$$P^{-1}AX = \underbrace{P^{-1}P}Y'$$
$$\Leftrightarrow \underbrace{P^{-1}A.PY} = IY' = Y'$$
$$\Leftrightarrow \boxed{DY = Y'}$$

③ Conclusion résoudre $X' = AX$ revient à résoudre $\boxed{Y' = DY}$

$\uparrow$ pas facile $\qquad\qquad \nearrow$ facile po facile faile

Représentation graphique des solutions :

On rappelle qu'on est dans le cas où $\boxed{\Delta = tr(A)^2 - 4\det(A) > 0}$ et qu'on a λ_1 et λ_2 deux racines réelles distinctes du polynôme caractéristique $\lambda^2 - tr(A)\lambda + \det(A) = 0$

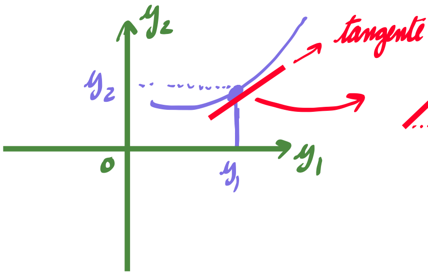
alors résoudre $\begin{cases} x_1' = ax_1 + bx_2 \\ x_2' = cx_1 + dx_2 \end{cases}$ revient à résoudre $\boxed{\begin{cases} y_1' = \lambda_1 y_1 \\ y_2' = \lambda_2 y_2 \end{cases}}$ $(Y' = D.Y)$

$(X' = AX)$

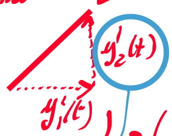
$\Downarrow$ cours de L_2 :

$$\boxed{\begin{aligned} y_1(t) &= k_1 e^{\lambda_1 t} \\ y_2(t) &= k_2 e^{\lambda_2 t} \end{aligned}}$$

Pour tracer les solutions on va utiliser les tangentes :



pente de la tangente = vecteur vitesse $= (y_1'(t), y_2'(t))$



si $y_1'(t) > 0 \Rightarrow y_1(t)$ est $\nearrow$ $\rightarrow$ droite

si $y_1'(t) < 0 \Rightarrow y_1(t)$ est $\searrow$ $\leftarrow$ gauche

si $y_2'(t) > 0 \Rightarrow y_2(t)$ est $\nearrow$ $\uparrow$ haut

si $y_2'(t) < 0 \Rightarrow y_2(t)$ est $\searrow$ $\downarrow$ bas

si $y_1'(t) = 0$: on ne bouge pas horizontalement si $y_2'(t)=0$ " " " verticalement

Exemples : CAS 1 si $\lambda_1=0$ et $\lambda_2\neq 0$ $(\lambda_1\lambda_2=0)$ $(\det A=\lambda_1\lambda_2=0)$

$tr(A)=\lambda_1+\lambda_2=\lambda_2$

on suppose $\boxed{\lambda_2>0}$

$\begin{cases} y_1'(t)=\lambda_1 y_1 \\ y_2'(t)=\lambda_2 y_2 \end{cases}$ s'écrit avec $\lambda_1=0,\ \lambda_2>0$: $\begin{cases} y_1'(t)=0 \\ y_2'(t)=\underbrace{\lambda_2}_{>0} y_2 \end{cases}$ → pas de déplacement horizontal

$\Downarrow$

il n'y a que des déplacements verticaux