10 décembre 2024 (CM3)

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(u,v) \\ g(u,v) \end{pmatrix} + D\,\Delta \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

Étudions ce système :

(i) <u>Recherche des équilibres homogènes</u> : ce sont des vecteurs constants $\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$ (en temps & en espace)

qui vérifient $\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\Delta \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc $\begin{pmatrix} f(u_0,v_0) \\ g(u_0,v_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

c'est à dire que $\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$ est solution du système $\begin{cases} f(u_0,v_0) = 0 \\ g(u_0,v_0) = 0 \end{cases}$

(ii) <u>Étude de la stabilité des équilibres</u> :

Pour ça, on perturbe les équilibres. On pose $\begin{pmatrix} u_p \\ v_p \end{pmatrix}$ une "petite" perturbation de $\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$

et $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_p \\ v_p \end{pmatrix}$ on remplace alors dans le système :

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_p \\ v_p \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} f(u_0+u_p, v_0+v_p) \\ g(u_0+u_p, v_0+v_p) \end{pmatrix} + D.\Delta \begin{pmatrix} u_0+u_p \\ v_0+v_p \end{pmatrix}$$

On obtient

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} u_p \\ v_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(u_0+u_p, v_0+v_p) \\ g(u_0+u_p, v_0+v_p) \end{pmatrix} + D\Delta \begin{pmatrix} u_p \\ v_p \end{pmatrix}$$

on linéarise le problème en utilisant la matrice jacobienne

$J = J_{(f,g)}(u_0,v_0)$ et on a : $\begin{pmatrix} f(u_0+u_p, v_0+v_p) \\ g(u_0+u_p, v_0+v_p) \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} u_p \\ v_p \end{pmatrix}$ (<u>rappel</u> : $\begin{pmatrix} f(u_0,v_0) \\ g(u_0,v_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$)

Donc le système linéarisé s'écrit :

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} u_p \\ v_p \end{pmatrix} = J.\begin{pmatrix} u_p \\ v_p \end{pmatrix} + D\Delta \begin{pmatrix} u_p \\ v_p \end{pmatrix}}$$

on rappelle que $J = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial u} f(u_0,v_0) & \frac{\partial}{\partial v} f(u_0,v_0) \\ \frac{\partial}{\partial u} g(u_0,v_0) & \frac{\partial}{\partial v} g(u_0,v_0) \end{pmatrix}$

Pour savoir si l'equilibre $\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$ est LAS ou non, on considère la condition initiale de la perturbation : $\begin{pmatrix} u_p(0,x) \\ v_p(0,x) \end{pmatrix}$ comme étant une fonction propre de la façon suivante:

$$\begin{pmatrix} u_p(0,x) \\ v_p(0,x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \beta_0 \end{pmatrix} w_k(x)$$

ensuite on utilise la méthode de separation des variables:

$$\begin{pmatrix} u_p(t,x) \\ v_p(t,x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha(t) w_k(x) \\ \beta(t) w_k(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \end{pmatrix} w_k(x) \qquad k \in \mathbb{N} \text{ ou } \mathbb{N}^*$$

et on remplace dans le système :

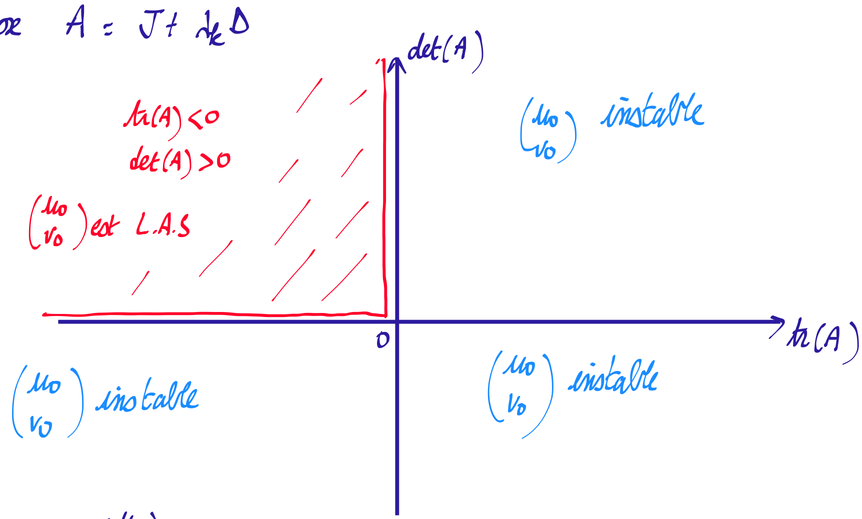
$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \end{pmatrix} . w_k(x) = J. \begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \end{pmatrix} w_k(x) + D. \Delta \begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \end{pmatrix} w_k(x)$$

$$\Leftrightarrow \quad w_k(x)\begin{pmatrix}\alpha'(t)\\ \beta'(t)\end{pmatrix} = J.\begin{pmatrix}\alpha(t)\\ \beta(t)\end{pmatrix} w_k(x) + D.\begin{pmatrix}\alpha(t)\\ \beta(t)\end{pmatrix}.\Delta w_k(x)$$

$$\text{''} \quad = \quad \text{''} \quad + D\begin{pmatrix}\alpha(t)\\ \beta(t)\end{pmatrix}.\lambda_k.w_k(x)$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix}\alpha(t)\\ \beta(t)\end{pmatrix}' = \left(J + \lambda_k D\right)\begin{pmatrix}\alpha(t)\\ \beta(t)\end{pmatrix}$$

On pose $A = J + \lambda_k D$



Autrement dit $\begin{pmatrix}u_0\\ v_0\end{pmatrix}$ est L.A.S ssi $tr(A)<0$ et $det(A)>0$

<u>Pour résumer</u> : méthode : on considère le système $\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}f(u,v)\\ g(u,v)\end{pmatrix} + D.\Delta\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}$

① on cherche les équilibres $\begin{pmatrix}u_0\\ v_0\end{pmatrix}$

<u>ATTENTION</u> ② on vérifie que ces équilibres $\begin{pmatrix}u_0\\ v_0\end{pmatrix}$ sont L.A.S. quand il n'y a pas de terme de diffusion

(pour ça il faut que $tr(J)<0$ et $det(J)>0$

③ on cherche les fréquences k qui déstabilisent les équilibres quand on rajoute la diffusion c.à.d qu'on a : $tr(A)>0$ et/ou $det(A)<0$

__Remarque__ : même avec ça, ce n'est pas encore gagné pour avoir l'émergence de forme.

Mais il y a un critère (donné par Turing) qui est une condition nécessaire (mais pas suffisante) d'apparition de forme.

C'est ce qu'on appelle la règle des signes de Turing

__Règle__ : pour avoir l'instabilité des équilibres __il faut__ que la Jacobienne J ait les coefficients de signes OPPOSÉS sur les diagonales.

c'est-à-dire que l'on doit avoir :

$$\begin{pmatrix} + & - \\ + & \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} - & + \\ - & + \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} + & + \\ & \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} - & - \\ + & + \end{pmatrix}$$

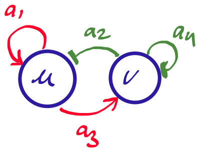
$$\begin{pmatrix} + & \times \\ + & - \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} - & + \\ - & + \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} + & + \\ - & - \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} - & - \\ + & + \end{pmatrix}$$

si cette règle n'est pas vérifiée on n'aura pas d'émergence de formes. Mais si c'est vérifié, on peut ne pas avoir non plus d'émergence de forme la condition n'est pas suffisante.

<u>Interprétation</u> :

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial u} f(u_0, v_0) & \frac{\partial}{\partial v} f(u_0, v_0) \\ \frac{\partial}{\partial u} g(u_0, v_0) & \frac{\partial}{\partial v} g(u_0, v_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}$$

si on a $\begin{pmatrix} + & - \\ + & - \end{pmatrix}$



$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} u_p \\ v_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_p \\ v_p \end{pmatrix} + D\Delta\begin{pmatrix} u_p \\ v_p \end{pmatrix}$$

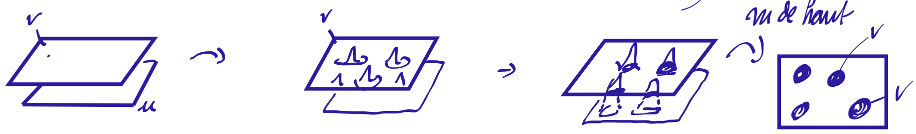
$$\frac{\partial}{\partial t} u_p = \begin{cases} \overset{+}{a_1} u_p + \overset{-}{a_2} v_p + \dots \\ a_3 u_p + a_4 v_p + \end{cases}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} v_p = a_3 u_p + a_4 v_p + \dots$$
$$\qquad + \qquad\quad -$$

on appelle ces systèmes activateurs / inhibiteurs (ici u active v et v inhibe u)

u : activateur
v : inhibiteur

Turing a montré que pour un système activateur-inhibiteur (qui vérifie la règle des signes) si u est activateur par exemple et si le rapport des coefficients de diffusion $\boxed{\frac{d_v}{d_u}}$ ($d_u, d_v > 0$: coef. diffusion) est "assez grand" alors l'équilibre homogène $\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$ devient INSTABLE par rapport à une fonction propre $w_k(x)$ (de fréquence k) et alors une FORME semblera émerger à partir de "RIEN" (dans le "RIEN" se trouve une petite perturbation qui contient $w_k(x)$)



u active v $\quad d_v$: diffuse très vite
v inhibe u $\quad u$: " lentement

Exercice : On considère le système

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} u(t,x) = 2u(t,x) - v(t,x) + d_u \Delta u(t,x) \\ \dfrac{\partial}{\partial t} v(t,x) = v(t,x) + \dfrac{1}{2} u(t,x) + d_v \Delta v(t,x) \end{cases}$$

Est-ce un système activateur-inhibiteur ? Autrement dit vérifie-t-il la règle des signes de Turing ?

Exercice : On considère le système suivant : pour tout $t \geq 0$ et pour tout $x \in [0,\pi]$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} u(t,x) = \dfrac{u^2(t,x)}{v(t,x)} - u(t,x) + d_u \Delta u(t,x) \\ \dfrac{\partial}{\partial t} v(t,x) = u^2(t,x) - 2v(t,x) + d_v \Delta v(t,x) \end{cases}$$

MEINHARDT

Quels sont les termes de réaction et de diffusion de ce système ?

1. Quels sont les termes de réaction et de diffusion de ce système ?

2. Ce système est-il linéaire ou non ?

3. Donner une interprétation à l'aide d'un diagramme.

4. Déterminer les équilibres de ce système

5. Ce système vérifie-t-il la règle des signes de Turing aux équilibres ?

6. Calculer la stabilité des équilibres en l'absence de diffusion

7. On considère les conditions aux bords de Neumann homogène et $d_u = \frac{1}{10}$

   a. Déterminer la stabilité des équilibres pour $d_v = 1/10$

   b. " " $d_v = 2/10$

   c. " " $d_v = 12/10$

8. Ce système peut-il faire apparaître des structures de Turing ? Si oui, lesquelles ? Les dessiner.