19 JANVIER 2026.

<u>Rappel</u> : $\Delta = tr(A)^2 - 4\det(A) > 0$ on avait λ_1 et λ_2 réelles distinctes

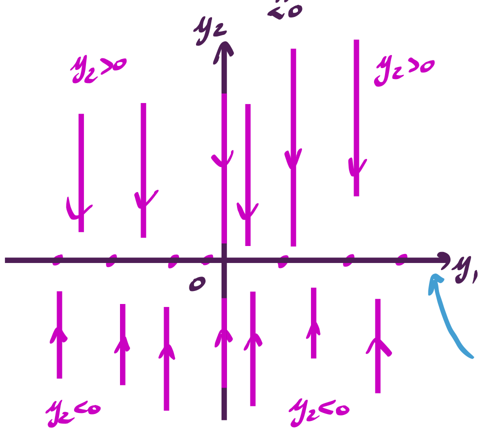
→ <u>cas</u> 1 $\lambda_1 \lambda_2 = 0$

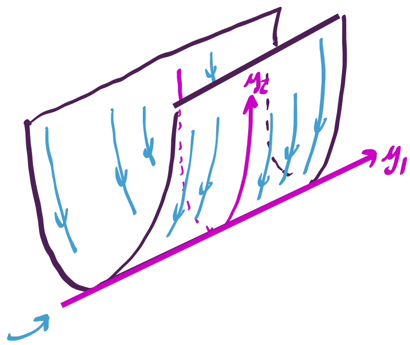
* $\lambda_1 = 0$ $\lambda_2 > 0$ ⇒ CRÊTES

* $\boxed{\lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 < 0}$ $\begin{cases} y_1' = \lambda_1 y_1 \\ y_2' = \lambda_2 y_2 \end{cases}$

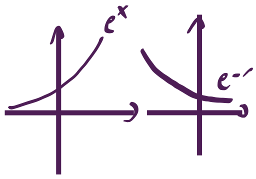
ici $\lambda_1 = 0$ donc $y_1' = 0$ → pas de mouvement horizontal

ici $\lambda_2 < 0$ donc $y_2' = \underbrace{\lambda_2}_{<0} y_2$ → du signe opposé de y_2





Remarque : • les solutions de $\begin{cases} y_1' = 0 \\ y_2' = \lambda_2 y_2 \end{cases}$



sont données par $y_1 = c_1$ et $y_2 = c_2 e^{\lambda_2 t}$

On voit que si $\lambda_2 < 0$: $\lim_{t \to +\infty} y_2(t) = \lim_{t \to +\infty} c_2 e^{\lambda_2 t} = 0$

si $\lambda_2 > 0$ $\lim_{t \to +\infty} y_2(t) =$ " $= \infty$

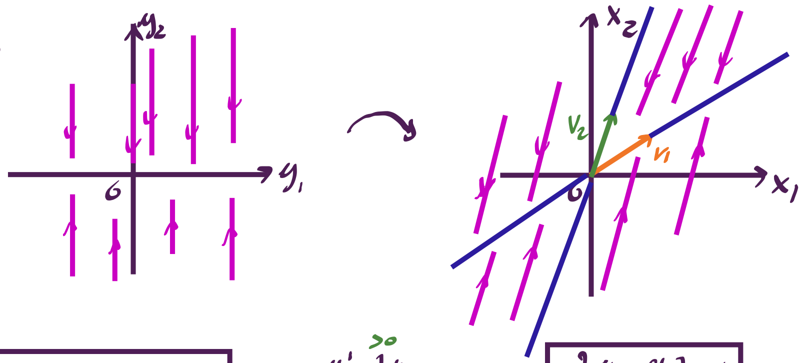
• Quel est lien avec les "vraies" solutions x_1 et x_2 de

$x_1' = a x_1 + b x_2$

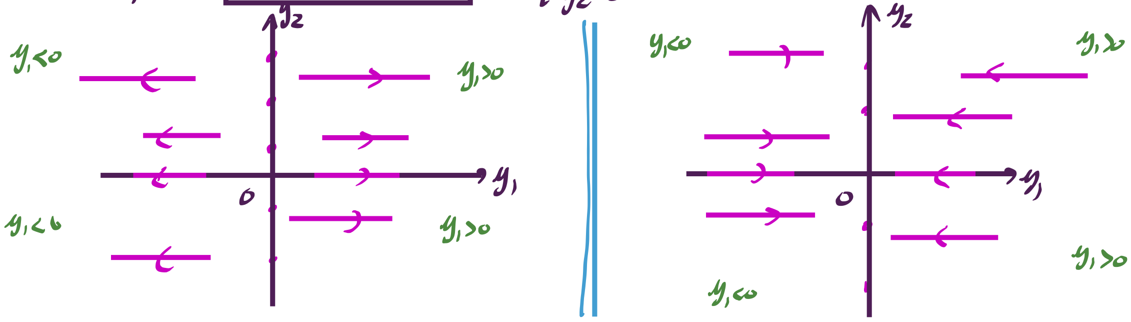
$$\begin{cases} x_1' = ax_1 + bx_2 \\ x_2' = cx_1 + dx_2 \end{cases} \quad ?$$

On peut tracer les solutions x_1 et x_2 à partir du graphe des y_1, y_2 en utilisant la matrice P et plus particulièrement les vecteurs V_1 et V_2

$\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 < 0$



Remarque : $\boxed{\text{si } \lambda_1 > 0 \text{ et } \lambda_2 = 0}$ on a : $\begin{cases} y_1' = \overset{>0}{\lambda_1} y_1 \\ y_2' = 0 \end{cases}$ $\boxed{\lambda_1 < 0 \text{ et } \lambda_2 = 0}$



$\boxed{\text{CAS 2}}$ $\boxed{\text{Si } \lambda_1 \lambda_2 \neq 0}$

- Si λ_1 et λ_2 sont de même signe $\boxed{\lambda_1 \lambda_2 > 0}$

- $\boxed{\text{CAS où } \lambda_1 > 0 \text{ et } \lambda_2 > 0}$

$$\begin{cases} y_1' = \lambda_1 y_1 \\ y_2' = \lambda_2 y_2 \end{cases}$$

<u>Méthode</u> : les solutions sont $\begin{cases} y_1 = k_1 e^{\lambda_1 t} \quad (1) \\ y_2 = k_2 e^{\lambda_2 t} \quad (2) \end{cases}$ $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ (calculées par la conditions initiales) et λ_1 et $\lambda_2 > 0$

On suppose : $k_1 \neq 0$: on met l'équation (1) à la puissance λ_2. $y_1^{\lambda_2} = k_1^{\lambda_2} e^{\lambda_1 \lambda_2 t}$

suppose : $k_1 \neq 0$: équation ① puissance λ_2 : $y_1^{\lambda_2} = k_1^{\lambda_2} e^{\lambda_1 \lambda_2 t}$

on " " ② " " λ_1 : $y_2^{\lambda_1} = k_2^{\lambda_1} e^{\lambda_1 \lambda_2 t}$

on divise $y_2^{\lambda_1}$ par $y_1^{\lambda_2}$: $\dfrac{y_2^{\lambda_1}}{y_1^{\lambda_2}} = \dfrac{k_2^{\lambda_1}}{k_1^{\lambda_2}} = k$

constante

on pose

constante

on a $y_2^{\lambda_1} = k \cdot y_1^{\lambda_2}$

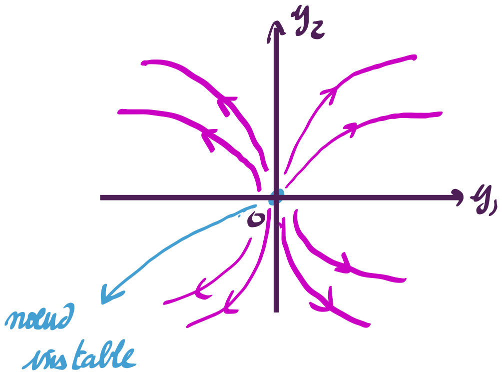
on divise par la puissance λ_1 : $y_2 = k^{1/\lambda_1}\, y_1^{\lambda_2/\lambda_1}$ on pose $C = k^{1/\lambda_1}$ et $\alpha = \dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}$

on obtient $\boxed{y_2 = C\, y_1^{\alpha}}$ avec $\alpha = \dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}$

<u>on a 2 sous-cas</u>

si $\boxed{\alpha < 1}$
$\Leftrightarrow$ $\lambda_2 < \lambda_1$

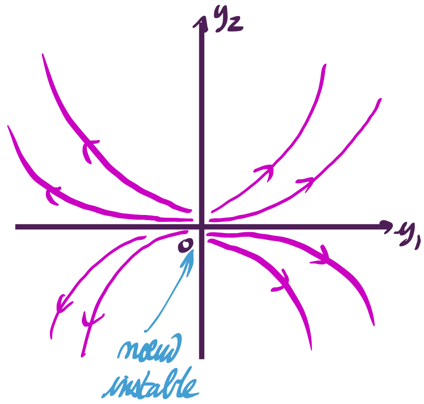
ex : $\alpha = \frac{1}{2}$ $y_2 = C \cdot y_1^{1/2} = C\sqrt{y_1}$



si $\boxed{\alpha > 1}$
$\Leftrightarrow$ $\lambda_2 > \lambda_1$

ex : $\alpha = 2$

$y_2 = C y_1^2$



$\boxed{\text{si } \lambda_1 \text{ et } \lambda_2 < 0}$ de la même façon on $y_2 = C\, y_1^{\alpha}$

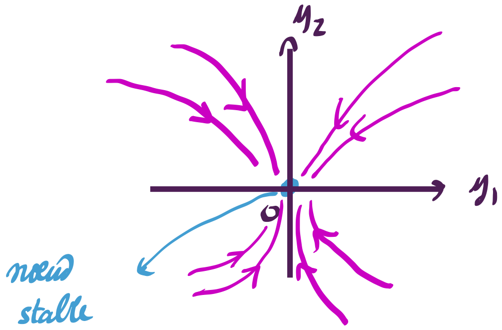
$\boxed{\alpha = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}}$ avec $\lambda_1, \lambda_2 < 0$

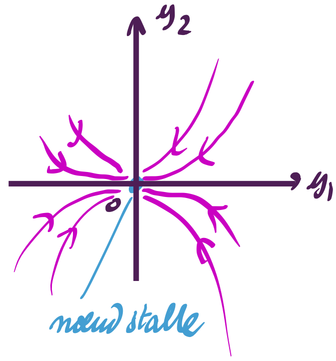
$\triangle\, \lambda_1 < 0$!!!

si $\alpha < 1 \iff \frac{\lambda_2}{\lambda_1} < 1 \iff \boxed{\lambda_2 > \lambda_1}$ || $\alpha > 1 \iff \frac{\lambda_2}{\lambda_1} > 1 \iff \boxed{\lambda_2 < \lambda_1}$

si $\alpha < 1 \iff \frac{\lambda_2}{\lambda_1} < 1 \iff \boxed{\quad}$ $\uparrow \lambda_1 < 0$!!!

$> 1 \iff \frac{\lambda_2}{\lambda_1} > 1 \iff \boxed{\lambda_2 < \lambda_1}$





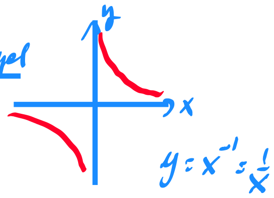
cas où $\boxed{\lambda_1 \lambda_2 < 0}$

• On prend par exemple $\boxed{\lambda_1 < 0 \text{ et } \lambda_2 > 0}$

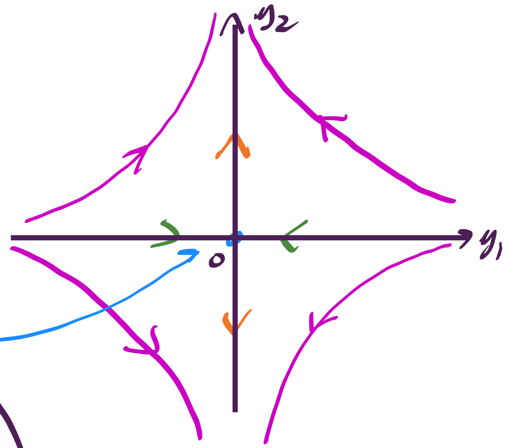
Par la même méthode que précédemment on a $y_2 = C \cdot y_1^{\alpha}$ avec $\boxed{\alpha < 0}$

$\alpha = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$

Rappel



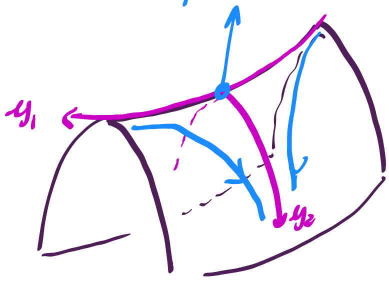
$y = x^{-1} = \frac{1}{x}$



$$\begin{cases} y_1(t) = k_1 e^{\overset{<0}{\lambda_1} t} \\ y_2(t) = k_2 e^{\overset{>0}{\lambda_2} t} \end{cases}$$

noeud col

ou point selle



Exercice : On considère le système (S) $\begin{cases} x_1' = 2x_1 + 3x_2 \\ x_2' = 2x_1 + x_2 \end{cases}$

1. Mettre sous la forme $X' = AX$
2. Trouver $tr(A)$ et $\det(A)$. En déduire les valeurs de λ_1 et λ_2
3. Calculer V_1 et V_2 les vecteurs propres associés à λ_1 et λ_2
4. Donner l'expression de la solution avec la condition initiale $\begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
5. Représenter les solutions d'abord dans le repère (O, y_1, y_2) puis dans le repère (O, x_1, x_2)

__Solution__ ① (S) se met sous la forme $X' = AX$ avec $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

② $tr(A) = \boxed{3}$ $\quad det(A) = 2 - 6 = \boxed{-4}$

λ_1 et λ_2 sont solutions de $\lambda^2 - tr(A)\lambda + det(A) = 0$

c'est à dire $\boxed{\lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0}$ $\quad \Delta = 9 + 16 = 25 = 5^2$

donc $\lambda_1 = \frac{3-5}{2} = \boxed{-1}$ et $\lambda_2 = \frac{3+5}{2} = \boxed{4}$

③ __Cherchons V_1__ on pose $V_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ $\quad \left(V_1 = \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{pmatrix} \right)$

alors $V_1 \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et vérifie $AV_1 = \lambda_1 V_1$ Ⓔ

ici $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $\boxed{\lambda_1 = -1}$

donc Ⓔ $\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = -1 \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a + 3b = -a \\ 2a + b = -b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3a + 3b = 0 \\ 2a + 2b = 0 \end{cases} \underset{\div 2}{\overset{\div 3}{\Leftrightarrow}} \begin{cases} a + b = 0 \\ a + b = 0 \end{cases}$$

on a donc $a = -b$ et donc si on pose $a = 1$ alors $b = -1$ on pose alors $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Pour V_2 : on pose $V_2 = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ alors $V_2 \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et vérifie $AV_2 = \lambda_2 V_2$

avec $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $\lambda_2 = +4$ on obtient $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = +4 \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2c + 3d = +4c \\ 2c + d = +4d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2c + 3d = 0 \\ 2c - 3d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} 3d = 2c \\ 3d = 2c \end{matrix}$$

$\Leftrightarrow d = \frac{2c}{3}$ $\quad$ si on pose $c = 3$ alors $d = 2$

$\Leftrightarrow \quad d = \frac{2c}{3}$ si on pose $c = 3$ alors $d = 2$

donc $V_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

Conclusion $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est le vecteur propre associé à $\lambda_1 = -1$

et $V_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ " " " $\lambda_2 = 4$

(4) Les solutions X de (S) sont données par

$$X(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} V_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} V_2$$

$$\boxed{X(t) = c_1 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 e^{4t} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1(t) = c_1 e^{-t} + c_2 3 e^{4t} \\ x_2(t) = -c_1 e^{-t} + c_2 2 e^{4t} \end{cases}$$

comme $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 1$ on remplace

$$\begin{cases} x_1(0) = 1 = c_1 . e^0 + 3 c_2 e^0 = c_1 + 3c_2 \\ x_2(0) = 1 = -c_1 . e^0 + 2 c_2 e^0 = -c_1 + 2c_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c_1 + 3c_2 = 1 & (1) \\ -c_1 + 2c_2 = 1 & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1 + 3c_2 = 1 & (1) \\ 5c_2 = 2 & (1)+(2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c_1 + 3 . \frac{2}{5} = 1 \Rightarrow c_1 + \frac{6}{5} = 1 \\ c_2 = \frac{2}{5} \end{cases}$$

$$\boxed{c_1} = 1 - \frac{6}{5} = \frac{5}{5} - \frac{6}{5} = \boxed{\frac{-1}{5}}$$

$$\boxed{c_2 = \frac{2}{5}}$$

La solution est donnée par $\boxed{X(t) = -\frac{1}{5} e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{2}{5} e^{4t} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}}$

(5)

C