27 janvier 2025

- **Exercice :** $X' = \begin{pmatrix} 3 & -18 \\ 2 & -9 \end{pmatrix} X$ On pose $A = \begin{pmatrix} 3 & -18 \\ 2 & -9 \end{pmatrix}$

$tr(A) = -6$
$det(A) = 9$ $\Delta = tr(A)^2 - 4\,det(A) = 0$

On a une seule valeur propre $\lambda_0 = -3$

On détermine le vecteur propre associé $V_0 \in \mathbb{R}^2 \setminus \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ t.q. $AV_0 = \lambda_0 V_0$

On trouve $V_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

Pour trouver un autre vecteur linéairement indépendant on résout :

$$(A - \lambda_0 I) V_1 = V_0 \iff (A + 3I) V_1 = V_0$$

et on trouvait $V_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$

Les solutions sont données par $X_0 = e^{\lambda_0 t} V_0$ et $X_1 = e^{\lambda_0 t} t . V_0 + e^{\lambda_0 t} V_1$

$X_0 = e^{-3t} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $X_1 = e^{-3t} t . \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + e^{-3t} \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$X_0 = e^{-3t}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X_1 = e^{-3t}t\cdot\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} + e^{-3t}\begin{pmatrix}6\\1\end{pmatrix}$$

et toutes les solutions sont de la forme :

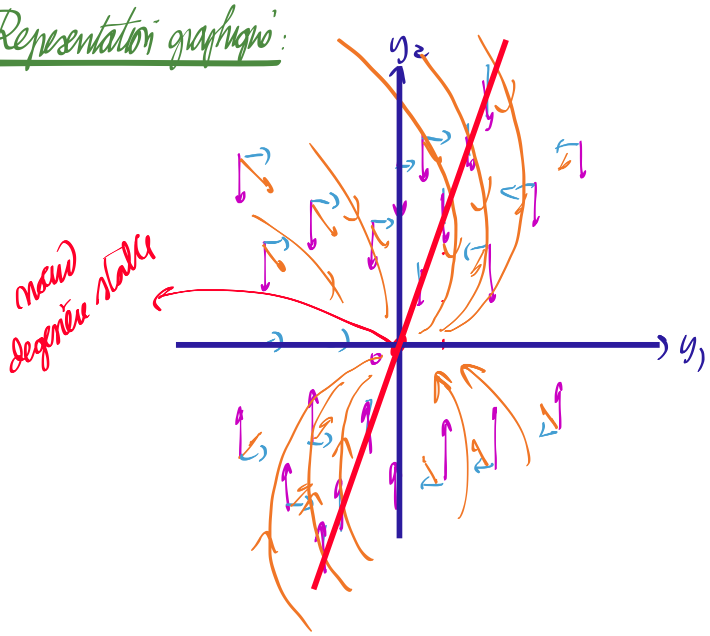
$$\boxed{X(t) = c_0 X_0 + c_1 X_1}$$

où c_0 et c_1 sont des réels que l'on détermine en fonction de la condition initiale.

donc $X(t) = c_0 e^{-3t}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} + c_1\left(e^{-3t}t\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} + e^{-3t}\begin{pmatrix}6\\1\end{pmatrix}\right)$

On peut calculer c_0 et c_1 si $X(t_0) = \begin{pmatrix}x_{10}\\x_{20}\end{pmatrix}$ en remplaçant t par t_0 ...

Représentation graphique :



$$\begin{cases} x_1' = +3x_1 - 18x_2 \\ x_2' = 2x_1 - 9x_2 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y_1' = -3y_1 + y_2 \\ y_2' = -3y_2 \uparrow\downarrow \end{cases}$

$P = (V_0 | V_1)$

$\left(Y' = JY = \begin{pmatrix}\lambda_0 & 1\\0 & \lambda_0\end{pmatrix} Y \right.$

$y_1' = 0 \Leftrightarrow -3y_1 + y_2 = 0$

$\Leftrightarrow y_2 = 3y_1$

$y_1' > 0 \Leftrightarrow -3y_1 + y_2 > 0$

$\Leftrightarrow y_2 > 3y_1$

$\boxed{\text{CAS 3} \quad \Delta<0}$

Dans ce cas là on a 2 racines complexes distinctes conjuguées de la forme

$\lambda_1 = a+ib$ et $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1 = a-ib$ (i : imaginaire $i^2=-1$)

On peut alors avoir 2 vecteurs propres V_1 et V_2 avec V_1 et $V_2 \in \mathbb{C}^2 \setminus \left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right\}$.

et V_2 est le conjugué de V_1. On note alors $V_2 = \bar{V_1}$

On a alors 2 solutions complexes $X_1 = e^{\lambda_1 t} V_1$ et $X_2 = e^{\lambda_2 t} V_2 = e^{\bar{\lambda}_1 t} \bar{V_1}$

et toutes les solutions sont données par $X(t) = c_1 X_1(t) + c_2 X_2(t)$ avec c_1 et $c_2 \in \mathbb{R}$

qui sont déterminés par la condition initiale qui sont déterminés par la condition initiale

Comment simplifier le problème ?

On a : $X' = AX$ et V_1 t.q. $AV_1 = \lambda_1 V_1$

V_2 t.q $AV_2 = \lambda_2 V_2 \Leftrightarrow A\bar{V_1} = \bar{\lambda_1}\bar{V_1}$ (conjugué)

on note $\boxed{\lambda_1 = a + ib}$ et $\lambda_2 = \bar{\lambda_1} = a - ib$ et $\boxed{V_1 = U + iW}$ et $V_2 = \bar{V_1} = U - iW$ $(U$ et $W \in \mathbb{R}^2)$

D'autre part $AV_1 = \lambda_1 V_1 \Leftrightarrow A(U + iW) = \lambda_1 (U + iW)$

$$A(U+iW) = (a+ib)(U+iW)$$
$$= aU + iaW + ibU + \overset{-1}{i^2} bW$$
$$= aU + iaW + ibU - bW$$
$$AU + iAW = aU - bW + i(aW + bU)$$

Rappel : 2 nombres complexes z_1 et z_2 qu'on écrit $z_1 = a_1 + ib_1$ et $z_2 = a_2 + ib_2$ sont égaux si et seulement si $a_1 = a_2$ et $b_1 = b_2$

ici, on a l'égalité qui nous donne

$$\begin{cases} AU = aU - bW \\ AW = bU + aW \end{cases}$$

$V_1 = U + iW$

matrice de passage

$$\Leftrightarrow A.(U|W) = (U \vdots W)\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$ si on pose $P = (U \vdots W)$ on a :

matrice qui a pour colonne U et W : $(U \vdots W)$

$A.P = P.J$ où $J = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ (matrice de Jordan)

$\Leftrightarrow P^{-1}AP = \underbrace{P^{-1}P}J$

$\Leftrightarrow P^{-1}AP = IJ$

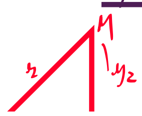
$\Leftrightarrow \boxed{P^{-1}AP = J}$

$$\begin{cases} y_1' = ay_1 - by_2 \\ y_2' = by_1 + ay_2 \end{cases}$$

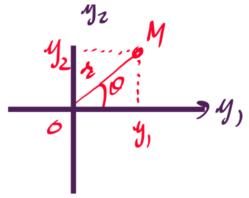
Question : comment représenter ces solutions ? On utilise le système $\boxed{Y' = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} Y}$

Méthode pour simplifier le problème on utilise une autre **représentation des coordonnées**

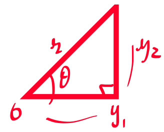
$y_2 \uparrow y_2 \ldots\ldots M$ $\quad M : \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$



$\cos\theta = \frac{y_1}{2} \Leftrightarrow y_1 = 2\cos\theta$



$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$



$y_1^2 + y_2^2 = r^2$

$\cos\theta = \frac{y_1}{r} \Leftrightarrow y_1 = r\cos\theta$

$\sin\theta = \frac{y_2}{r} \Leftrightarrow y_2 = r\sin\theta$

lien entre y_1, y_2, r et θ !!

Revenons à l'équation : $\begin{cases} y_1' = a y_1 - b y_2 \\ y_2' = b y_1 + a y_2 \end{cases}$

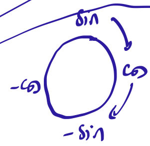
passons aux coordonnées r et θ :

$\boxed{y_1(t) = r(t)\cos\theta(t)}$

$y_1'(t) = r'(t)\cos\theta(t) + r(t)\cos'(\theta(t)).\theta'(t)$

$\boxed{y_1' = r'\cos\theta - r\sin\theta.\,\theta'}$

$\boxed{y_2(t) = r(t)\sin(\theta(t))}$



$y_2'(t) = r'(t)\sin(\theta(t)) + r(t).\sin'(\theta(t)).\theta'(t)$

$\boxed{y_2' = r'\sin\theta + r\cos\theta.\,\theta'}$

on remplace dans le système :

$$\begin{cases} r'\cos\theta - r\sin\theta.\theta' = a.r\cos\theta - b.r\sin\theta & (1) \\ r'\sin\theta + r\cos\theta.\theta' = b\,r\cos\theta + a\,r\sin\theta & (2) \end{cases}$$

$\times(1)$ par cos : $\quad r'\cos^2\theta - r\cos\theta\sin\theta = a r\cos^2\theta - b\,r\cos\theta\sin\theta$

$\times(2)$ par sin : $\quad + \; r'\sin^2\theta + r\cos\theta\sin\theta = b r\cos\theta\sin\theta + a\,r\sin^2\theta$

$$r'\cos^2\theta + r'\sin^2\theta + 0 = a r\cos^2\theta + a r\sin^2\theta$$

$$\Leftrightarrow \quad r'\underbrace{(\cos^2\theta + \sin^2\theta)}_{=1} = a r\underbrace{(\cos^2\theta + \sin^2\theta)}_{=1}$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{r' = ar} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{r = c\,e^{at}}$$

$c > 0$

si $a > 0$ $\quad r \xrightarrow[t\to+\infty]{} +\infty$

si $a = 0$ $\quad r = c = c^{te}$

si $a < 0$ $\quad r \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$

$(1)\times\sin$: $\quad r'\sin\theta\cos\theta - r\sin^2\theta.\theta' = a\,r\sin\theta\cos\theta - b r\sin^2\theta$

$(2)\times(-\cos)$: $\quad + \; -r'\sin\theta\cos\theta - r\cos^2\theta\,\theta' = -b r\cos^2\theta - a r\cos\theta\sin\theta$

$$0 - r\sin^2\theta.\theta' - r\cos^2\theta.\theta' = -b r\sin^2\theta - b r\cos^2\theta$$

$$\Leftrightarrow \quad -r\theta'\underbrace{(\cos^2\theta + \sin^2\theta)}_{=1} = -br\underbrace{(\cos^2\theta + \sin^2\theta)}_{=1}$$

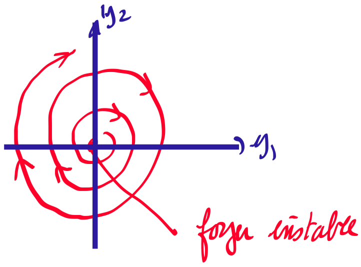
$$\Leftrightarrow \quad -r\theta' = -br$$

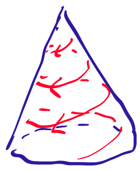
$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\theta' = b} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\theta = bt + c^{te}}$$

si $b > 0$

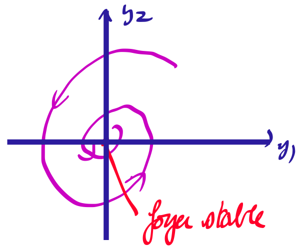
si $b < 0$

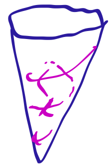
Graphe si $a>0$ et $b<0$



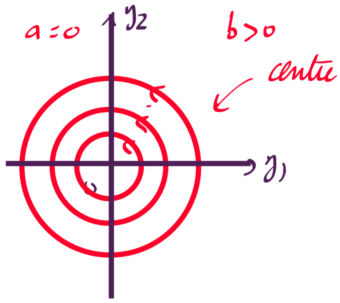


si $a<0$ $b>0$





si $a=0$ $b>0$



Exercice : Etudier $X' = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} X$

$$X(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

- Donner les solutions
- Donner la solution qui vérifie $X(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$
- Tracer les solutions