16 décembre 2024 : PARTIE 2 . Equations hyperboliques (de type transport)
. Equations différentielles à retard

I Equations hyperboliques

1. Application biologique : le cycle cellulaire

Le cycle cellulaire permet ici de donner un excellent exemple de dynamique de population

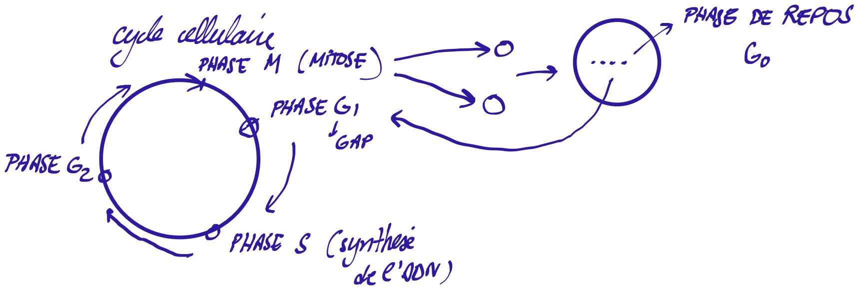
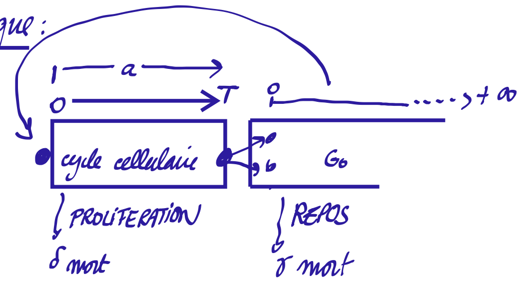
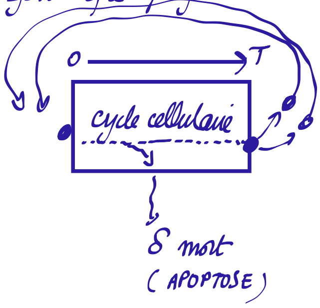


Schéma mathématique :

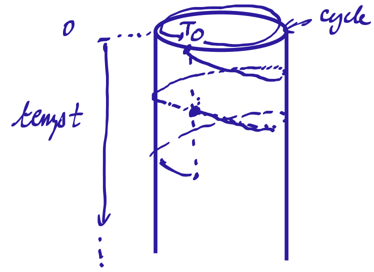


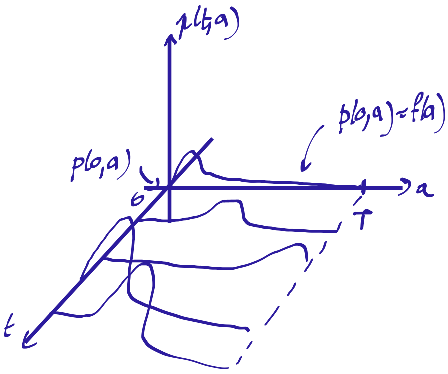
Simplifions le modèle pour une première approche : cellules cancéreuses qui ne font que proliférer



on note $p(t,a)$: population de cellules au temps t d'âge a

a : variable de structure





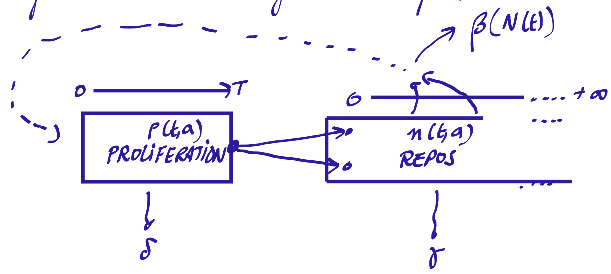
$$\frac{\partial}{\partial t} p(t,a) + \frac{\partial}{\partial a} p(t,a) = -\delta p(t,a) \quad \text{pour tous } t \geq 0 \text{ et } a \in [0,T]$$

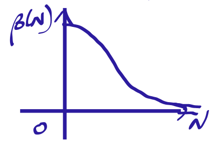
+ condition initiale $p(0,a) = f(a) \quad a \in [0,T]$

+ condition aux bords $p(t,0) = 2p(t,T)$

Que se passe-t-il si on rajoute du repos?

$$N(t) = \underbrace{\int_0^{+\infty} n(t,a)\,da}_{\text{population totale de cellules au repos au temps } t}$$





Le modèle s'écrit alors :

PROLIFÉRATION $\quad \frac{\partial}{\partial t} p(t,a) + \frac{\partial}{\partial a} p(t,a) = -\delta p(t,a)$ pour tous $t \geq 0$ et $a \in [0,T]$

REPOS $\quad \frac{\partial}{\partial t} n(t,a) + \frac{\partial}{\partial a} n(t,a) = -\gamma n(t,a) - \beta(N(t)) n(t,a)$ pour tous $t \geq 0$ et $a \in [0,+\infty[$

conditions initiales : $p(0,a) = f(a)$, $a \in [0,T]$ et $n(0,a) = g(a)$, $a \in [0,+\infty[$

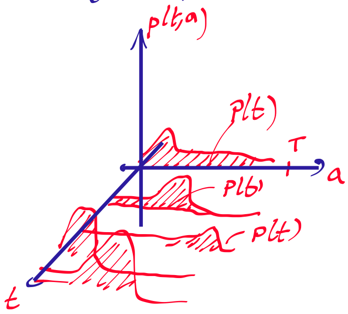
conditions aux bords : . $p(t,0) = \int_0^{+\infty} \beta(N(t)) . n(t,a)\,da = \beta(N(t)) . \int_0^{+\infty} n(t,a)\,da = \beta(N(t)) . N(t)$

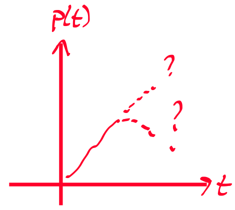
. $n(t,0) = 2p(t,T)$

condition supplémentaire : on impose $\lim_{a \to +\infty} n(t,a) = 0$ (pas de cellules d'âge trop grand)

<u>Question</u> : comment peut-on résoudre un tel système ?

- Etude de ce système par l'étude des populations totales : $P(t) = \int_0^T p(t,a)\,da$ et $N(t) = \int_0^{+\infty} n(t,a)\,da$





Pour étudier ces populations totales $P(t)$ et $N(t)$ on intègre les équations du système par rapport à l'âge :

On obtient :
$$\int_0^T \left(\frac{\partial}{\partial t} p(t,a) + \frac{\partial}{\partial a} p(t,a)\right) da = \int_0^T -\delta p(t,a)\,da$$

$$\Leftrightarrow \int_0^T \frac{\partial}{\partial t} p(t,a)\,da + \int_0^T \frac{\partial}{\partial a} p(t,a)\,da = -\delta \int_0^T p(t,a)\,da$$

si p est suffisamment régulière

$$\Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial t} \int_0^T p(t,a)\,da + p(t,T) - p(t,0) = -\delta \cdot P(t)$$

$$\boxed{P'(t) + p(t,T) - \beta(N(t)) \cdot N(t) = -\delta P(t)}$$

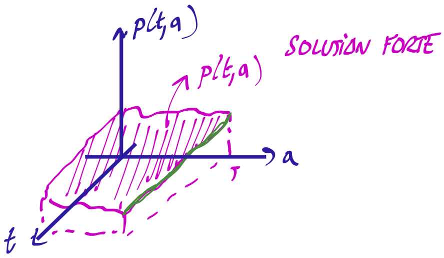
et
$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{\partial}{\partial t} n(t,a) + \frac{\partial}{\partial a} n(t,a)\right) da = \int_0^{+\infty} -\left(\gamma + \beta(N(t))\right) n(t,a)\,da$$

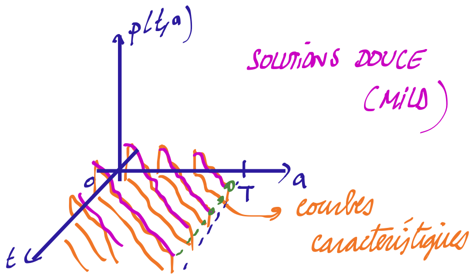
$$\Leftrightarrow N'(t) + \underbrace{\lim_{a \to +\infty} n(t,a)}_{=0} - \underbrace{n(t,0)}_{= p(t,T)} = -\left(\gamma + \beta(N(t))\right) N(t)$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{N'(t) - 2p(t,T) = -(\gamma + \beta(N(t)))\, N(t)}$$

<u>Etape suivante</u> : déterminons $p(t,T)$.

Comment ? Grâce à la méthode des CARACTÉRISTIQUES





Méthode pour trouver les solutions données le long des courbes caractéristiques

ces courbes sont données par un lien qui relie a et t

On suppose alors que a depend de t, et on va trouver $a(t)$ de telle sorte qu'on puisse trouver une expression des solutions le long de ces courbes $a(t)$.

Si on suppose a dependant de t. On pose alors $W(t) = p(t, a(t))$

TREE DIAGRAM

et donc $\boxed{W'(t) = \frac{\partial}{\partial t} p(t,a) + a'(t) \frac{\partial}{\partial a} p(t,a)}$

$p(t, a(t))$

$\frac{\partial}{\partial t} p \quad / \quad \backslash \quad \frac{\partial}{\partial a} p$

$\frac{dt}{dt} = 1 \quad | \qquad | \quad \frac{d}{dt} a(t) = a'(t)$

$1 . \frac{\partial}{\partial t} p(t,a) + a'(t) \frac{\partial}{\partial a} p(t,a)$

Faisons le lien avec notre équation en p : $\underbrace{\frac{\partial}{\partial t} p(t,a) + \frac{\partial}{\partial a} p(t,a)}_{} = -\delta p(t,a)$

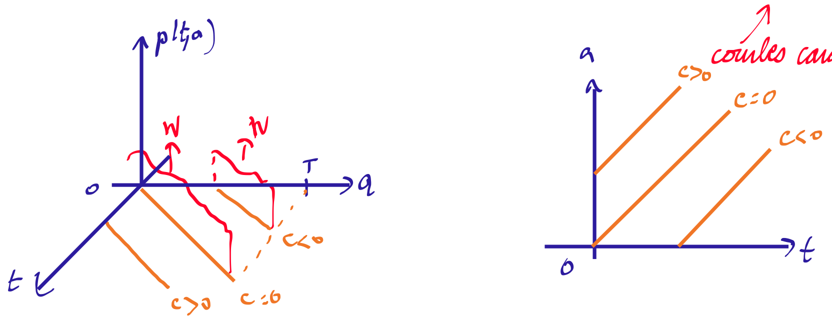
on aurait ainsi : $\rightarrow = W'(t) = -\delta W(t)$

on aemènant avoir : $\underline{\qquad\qquad\qquad\qquad} = W'(t) = -\delta W(t)$

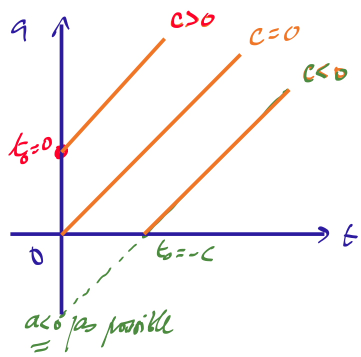
Si $a'(t) = 1$ ce sera le cas ! On aura $W'(t) = -\delta W(t)$ edo qu'on sait résoudre !

↳ c'est à dire que $a(t) = t + c$ lien entre a et t ; $\boxed{a = t + c}$ $(c \in \mathbb{R})$

courbes caractéristiques



Resolvons $W'(t) = -\delta W(t) \Rightarrow W(t) = W(t_0)\, e^{-\delta(t - t_0)}$



si $c>0$ $\quad t_0=0$

si $c<0$ $\quad t_0=-c$

on résume ça de la façon suivante :

$t_0 = \max\{0,-c\}$

si $\boxed{c>0}$ $\quad t_0=0 \quad$ et $\quad W(t) = W(t_0)\, e^{-\delta(t-t_0)}$ s'écrit :

$a = t+c$ donc $a(0)=c$

et $c = a-t$

$c>0$

$\Leftrightarrow a-t>0$

$\Leftrightarrow \boxed{a>t}$

$W(t) = W(0)\, e^{-\delta t} \quad$ et $\quad W(0) = p(0,a(0))$

$$\boxed{p(t,a) = p(0,a-t)\, e^{-\delta t}}$$

$a = t+c$

$-c = t-a$

$a(-c) = -c+c = 0$

$W(-c) = p(-c, a(-c))$

$= p(t-a, 0)$

si $\boxed{c<0}$ $\quad t_0=-c \quad W(t) = W(-c)\, e^{-\delta(t+c)}$, $\quad t+c = a$

$= \quad e^{-\delta a}$

$\Leftrightarrow \boxed{a<t}$

$$\boxed{p(t,a) = p(t-a,0)\, e^{-\delta a}}$$

Pour résumer les solutions douces sont :

δt

$$p(t,a) = \begin{cases} p(0,a-t)e^{-\delta t} & \text{si } a>t \\ p(t-a,0)e^{-\delta a} & \text{si } a<t \end{cases}$$

Nous ce qu'on veut c'est $p(t,T)$: comme on veut étudier le comportement asymptotique des solutions $(t \to +\infty)$, on choisit la 2ème expression:

$$p(t,a) = p(t-a,0)e^{-\delta a} \quad \text{avec } t>a$$

si $a = T$ on a $p(t,T) = p(t-T,0)e^{-\delta T}$ or $p(t,0) = \beta(N(t)).N(t)$

$$\beta''(N(t-T)).N(t-T)e^{-\delta T}$$

$$= \beta''(N(t-T)).\, N(t-T)\, e^{-\delta T}$$

On remplace alors $p(t,T)$ par cette expression dans les équations précédentes.

$$P'(t) + p(t,T) - \beta(N(t))N(t) = -\delta P(t)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{P'(t) = \beta(N(t))N(t) - \beta(N(t-T))\, N(t-T)\, e^{-\delta T} - \delta P(t)} \quad (1)$$

2 équations différentielles à retard

et $N'(t) = 2p(t,T) - (\delta + \beta(N(t))\, N(t)$

$$\boxed{N'(t) = 2\beta(N(t-T))\, N(t-T)\, e^{-\delta T} - (\delta + \beta(N(t)))N(t)} \quad (2)$$

dans (1) l'équation dépend de P et N

dans (2) seulement de N $\longrightarrow$ on étudie seulement l'équation à retard (2) puis on injecte la solution dans l'équation à retard (1)

$\rightarrow$ prochaine fois : étude de $x'(t) = f(x(t-T))$ edr (équation différentielle à retard)