21 janvier 2026

Rappel : on a $\begin{cases} x_1' = ax_1 + bx_2 \\ x_2' = cx_1 + dx_2 \end{cases} \Leftrightarrow X' = AX$ où $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

que l'on peut transformer par la matrice de passage en $Y' = DY$

où $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ avec λ_1 et λ_2 2 valeurs propres. (λ_1 et $\lambda_2 \in \mathbb{C}$)

et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ et la matrice de passage est donnée par $P = \begin{pmatrix} V_1 & V_2 \end{pmatrix}$, $V_1 = \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{pmatrix}$, $V_2 = \begin{pmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{pmatrix}$

où $V_1 \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $V_2 \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ calculés par $AV_1 = \lambda_1 V_1$
$AV_2 = \lambda_2 V_2$

On rappelle que λ_1 et λ_2 sont déterminés par $AV = \lambda V$

$\Leftrightarrow (A - \lambda I)V = 0$ avec $V \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \det(A - \lambda I) = 0$

$\Leftrightarrow \lambda^2 - \mathrm{tr}(A)\lambda + \det(A) = 0$

$\Delta = \mathrm{tr}(A)^2 - 4\det(A)$

$\boxed{\text{CAS 1} \quad \Delta > 0}$ vu la dernière fois

$\boxed{\text{CAS 2} \quad \Delta = 0}$ $\Delta = tr(A)^2 - 4\det(A) = 0$ on a alors une seule solution pour l'équation $\lambda^2 - tr(A)\lambda + \det(A) = 0$

$$\lambda_0 = \frac{tr(A)}{2}$$ c'est une racine double.

ⓐ <u>SOUS-CAS 1</u> : Si A est déjà diagonale : on a $A = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}$

$x' = ax$

Le système s'écrit alors : $\begin{cases} x_1' = \lambda_0 x_1 \\ x_2' = \lambda_0 x_2 \end{cases}$ $\begin{matrix} \Rightarrow x_1 = k_1 e^{\lambda_0 t} \quad (1) \\ \Rightarrow x_2 = k_2 e^{\lambda_0 t} \quad (2) \end{matrix}$

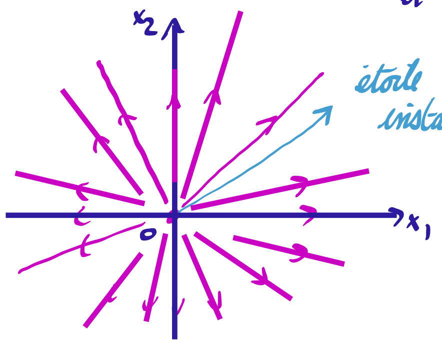
$x' = ax$
$\Rightarrow x = ke^{at}$

Comment représenter les solutions dans ce cas là ?

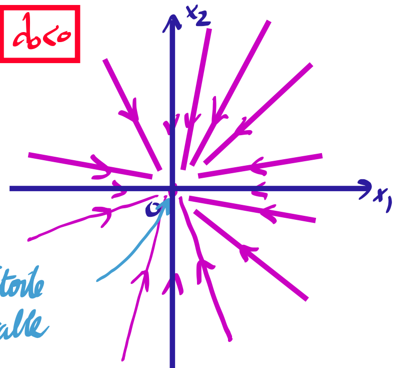
si $k_1 \neq 0$ on fait $\frac{(2)}{(1)}$: $\frac{x_2}{x_1} = \frac{k_2 \cancel{e^{\lambda_0 t}}}{k_1 \cancel{e^{\lambda_0 t}}}$ d'où $\frac{x_2}{x_1} = \frac{k_2}{k_1} = K$ on pose $K = \frac{k_2}{k_1}$

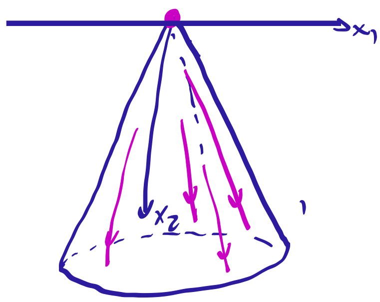
Ainsi on a $\boxed{x_2 = K x_1}$: équation d'une droite de coefficient directeur K et d'ordonnée à l'origine : 0

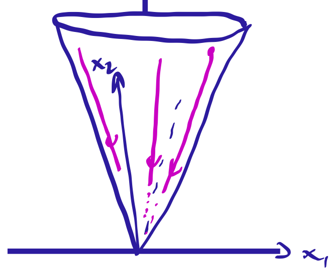
$\boxed{\lambda_0 > 0}$



$\boxed{\lambda_0 < 0}$

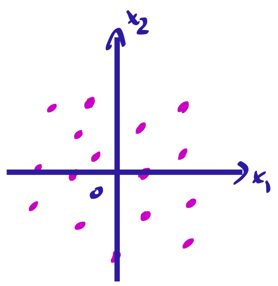






$\boxed{\lambda_0 = 0}$

$A = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{cases} x_1' = 0 \\ x_2' = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 = k_1 \\ x_2 = k_2 \end{cases}$



neutralement stable

6. <u>Sous-cas 2</u> : Si la matrice A n'est diagonale alors,

on pourrait montrer qu'on peut la mettre sous la forme $J = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}$ JORDAN

Le problème s'écrit alors

$$\begin{cases} y_1' = \lambda_0 y_1 + y_2 & (1) \\ y_2' = \lambda_0 y_2 & (2) \end{cases} \qquad (Y' = JY)$$

calcule d'abord

$$\boxed{y_2 = k_2 e^{\lambda_0 t}}$$

• on calcule d'abord y_2 : on a $\boxed{y_2 = k_2 e^{\lambda_0 t}}$

• on calcule alors y_1 qui vérifie $y_1' = \lambda_0 y_1 + k_2 e^{\lambda_0 t}$

C'est une équation de la forme $y_1' - \lambda_0 y_1 = k_2 e^{\lambda_0 t}$

<u>méthode</u> : on multiplie par $e^{-\int \lambda_0 dt} = e^{-\lambda_0 t}$

on a $\left(e^{-\lambda_0 t} y_1\right)' = k_2 e^{\lambda_0 t} e^{-\lambda_0 t} = k_2 e^{\lambda_0 t - \lambda_0 t} = k_2 e^0 = \boxed{k_2}$

on intègre <u>des 2 côtés</u> : $e^{-\lambda_0 t} y_1 = k_2 t + k_1$

finalement on obtient $\boxed{y_1 = k_2 t e^{\lambda_0 t} + k_1 e^{\lambda_0 t}}$

en résumé : $y_1 = k_2 t e^{\lambda_0 t} + k_1 e^{\lambda_0 t}$

$y_2 = k_2 e^{\lambda_0 t}$

Comment tracer les solutions ?

On part du problème $Y' = JY$ où $J = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}$

on a alors $\begin{cases} y_1' = \lambda_0 y_1 + y_2 \\ y_2' = \lambda_0 y_2 \end{cases}$

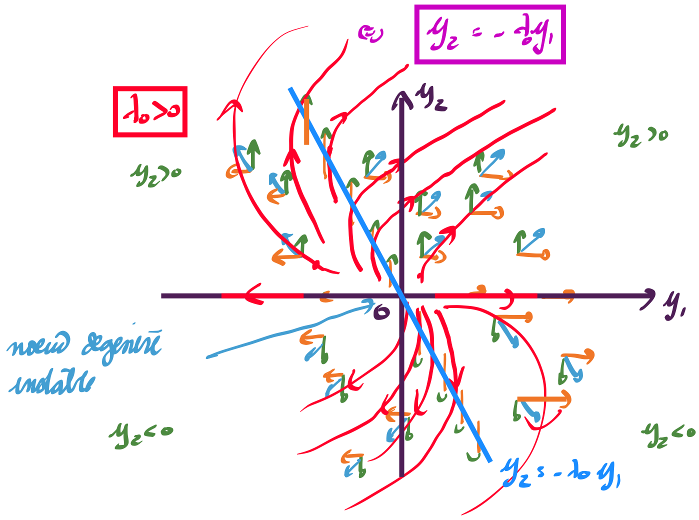
pas de mouvement horizontal
$= 0$ ↓
$y_1' > 0$ →
< 0 ←

$y_2' > 0$ ↑
< 0 ↓
$= 0$ pas de mouvement vertical

Méthode : $\boxed{\text{cas } \lambda_0 \neq 0}$ on étudie le cas où $y_1' = 0 \rightarrow$ pas de mouvement horizontal

$y_1' = 0 \Leftrightarrow \lambda_0 y_1 + y_2 = 0$

$\Leftrightarrow \boxed{y_2 = -\lambda_0 y_1}$



$y_1' > 0 \Leftrightarrow \lambda_0 y_1 + y_2 > 0$

$\Leftrightarrow \boxed{y_2 > -\lambda_0 y_1}$

$y_1' < 0 \Leftrightarrow y_2 < -\lambda_0 y_1$

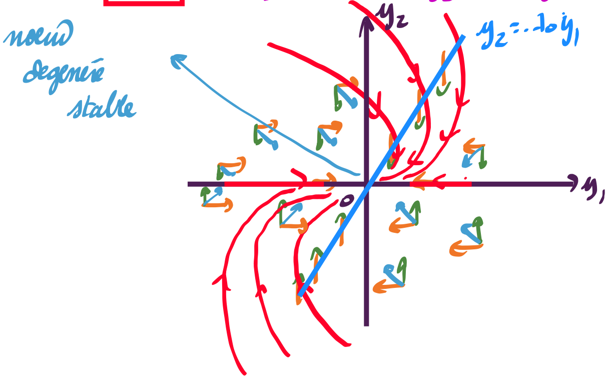
$y_2' > 0$

$\boxed{\lambda_0<0}$ $\quad y_1'=0 \iff y_2=-\lambda_0 y_1$

$y_1'>0 \iff y_2>-\lambda_0 y_1$

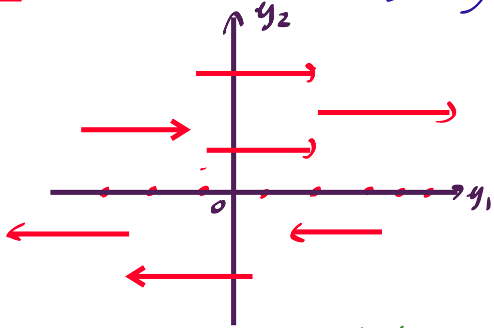
$y_1'<0 \iff y_2<-\lambda_0 y_1$

$y_2'>0 \qquad y_2'=\underbrace{\lambda_0}_{<0} y_2$



$\boxed{\lambda_0=0}$ $\quad$ On a alors $J=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$ donc $y_1'=0y_1+1y_2=y_2$

$y_2'=0y_2=0$



FLOT

<u>Exercice</u>: On considère $(S)\begin{cases} x_1'=3x_1-18x_2 \\ x_2'=2x_1-9x_2 \end{cases}$

1. Déterminer A pour mettre (S) sous la forme $X'=AX$
2. Calculer $tr(A)$ et $\det A$
3. Calculer les valeurs propres de A
4. Dessiner les solutions en utilisant la matrice de Jordan

<u>Solution</u> : 1. (S) peut s'écrire sous la forme $X' = AX$ où $A = \begin{pmatrix} 3 & -18 \\ 2 & -9 \end{pmatrix}$

$tr(A)$ $\quad$ $det(A)$

2. $tr(A) = \boxed{-6}$ $\det(A) = -9.3 + 18.2 = -27 + 36 = \boxed{9}$

3. Les valeurs propres sont solution de $\lambda^2 - tr(A)\lambda + \det(A) = 0$

c'est à dire $\lambda^2 + 6\lambda + 9 = 0$

$\Delta = 6^2 - 4.9 = 36 - 36 = 0$

On a donc une seule racine double $\lambda_0 = \frac{tr(A)}{2} = \frac{-6}{2} = \boxed{-3}$

4. Comme A n'est pas diagonale (c'est à dire de la forme $\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

dès le départ, alors on peut, par matrice de passage,

passer de A à $J = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix} \underset{\lambda_0 = -3}{=} \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$

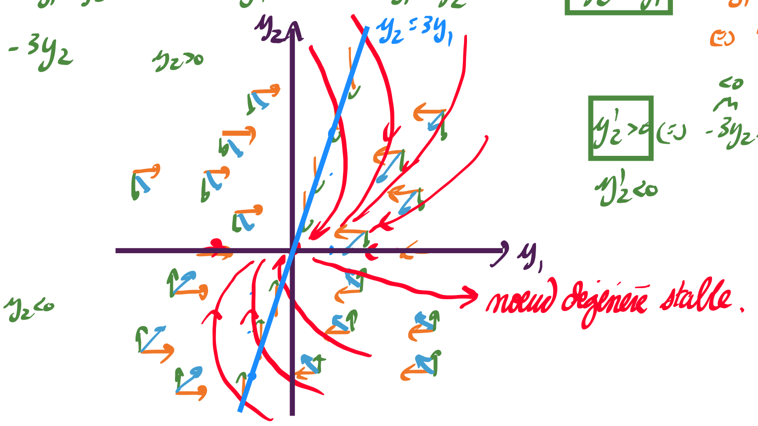
On est dans le cas $\lambda_0 < 0$

$\begin{cases} y_1' = -3y_1 + y_2 \\ y_2' = -3y_2 \end{cases}$ $\Rightarrow$ $y_1' = 0 \Leftrightarrow -3y_1 + y_2 = 0 \Leftrightarrow \boxed{y_2 = 3y_1}$

$y_1' > 0 \Leftrightarrow y_2 > 3y_1$

$\boxed{y_2' > 0} \Leftrightarrow \underset{<0}{-3y_2} > 0 \Leftrightarrow y_2 < 0$

$y_2' < 0$



26 janvier 2026. Cas où $\boxed{\Delta < 0}$

Dans ce cas là, on a deux racines <u>COMPLEXES</u> conjuguées:

partie réelle, partie imaginaire

$\lambda_1 = a + ib$ et $\lambda_2 = a - ib = \overline{\lambda_1}$ (λ_2 est le conjugué de λ_1)

avec i est imaginaire $\boxed{i^2 = -1}$

On peut avoir 2 vecteurs propres associés V_1 et V_2 avec $V_1, V_2 \in \mathbb{C}^2 \setminus \left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right\}$

et V_2 est le conjugué de V_1 (c'est à dire $V_2 = \overline{V_1}$)

On a alors 2 solutions complexes $X_1 = e^{\lambda_1 t} V_1$ et $X_2 = e^{\lambda_2 t} V_2$

les solutions sont alors données par $X = c_1 X_1 + c_2 X_2$ avec c_1 et c_2 calculés à partir de la condition initiale

Comment simplifiér le problème pour le représenter graphiquement ?

On part du problème initial $X' = AX$ on sait que V_1 est tel que $AV_1 = \lambda_1 V_1$

" V_2 " $AV_2 = \lambda_2 V_2$

$\iff A\overline{V_1} = \overline{\lambda_1}\,\overline{V_1}$

Si on note $\lambda_1 = a+ib$ $\quad \lambda_2 = \overline{\lambda_1} = a-ib$

et $V_1 = U+iW$ et $V_2 = U-iW$ avec U et $V \in \mathbb{R}^2$ (des vecteurs)

Comme $AV_1 = \lambda_1 V_1$ on a : $AV_1 = \lambda_1 V_1 \iff A(U+iW) = \lambda_1(U+iW)$

$\iff AU + iAW = \lambda_1 U + i\lambda_1 W$

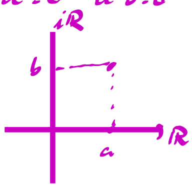
$\lambda_1 = a+ib \nearrow$ $\iff AU + iAW = (a+ib)U + i(a+ib)W$

$\iff AU + iAW = aU + ibU + iaW + i^2 bW$

$\iff AU + iAW = aU + ibU + iaW - bW \quad (i^2 = -1)$

$$\iff \underbrace{AU}_{\text{partie réelle}} + i\underbrace{AW}_{\text{partie imaginaire}} = \underbrace{aU - bW}_{\text{partie réelle}} + i(\underbrace{bU + aW}_{\text{partie imaginaire}})$$

Rappel :
2 complexes $z_1 = a+ib$
et $z_2 = c+id$
sont égaux si et seulement si
$a = c$ et $b = d$



On en déduit d'après le rappel que $\boxed{\begin{aligned} AU &= aU - bW \\ AW &= bU + aW \end{aligned}}$ (les parties réelles sont égales)
(" " imaginaires " ")

Par conséquent, si on pose $P = (U\ W)$ alors que vaut AP ?

$(V_1 = U+iW)$

$AP = A(U\ W) = ?$

si on fait $(U\ W)\cdot\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = A\underbrace{(U\ V)}_{P}$

P $\quad$ J

$\lambda_1 = a+ib$ $\quad$ $V_1 = U+iW$

on voit que l'on $AP = PJ$ où $J = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} U & W \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}$ $\quad$ $P^{-1}(AP) = \underbrace{P^{-1}P}.J = IJ = J$

Conclusion : on passe de la matrice A à la matrice de Jordan J grâce à la matrice de passage P en faisant

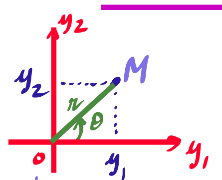
$$P^{-1}AP = J \qquad P^{-1} = \frac{1}{\det P}\cdot P'$$

Remarque : • pour représenter les solutions on utilise J avec le nouveau système $Y' = JY$ où $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$

• il est impossible de représenter les solutions avec ce système écrit de la sorte. Il faut donc trouver un moyen de le modifier pour le simplifier.

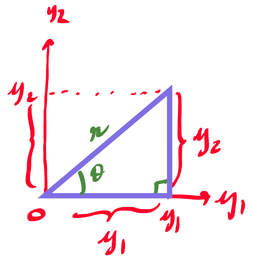
On va le faire avec les COORDONNÉES POLAIRES

Coordonnées polaires :



$M\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ et aussi $\begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix}$

Quel est le lien entre $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix}$?



$\sin\theta = \frac{y_2}{r}$ donc $y_2 = r.\sin\theta$

$\cos\theta = \frac{y_1}{r}$ donc $y_1 = r\cos\theta$

$r^2 = y_1^2 + y_2^2$

donc $r = \sqrt{y_1^2 + y_2^2}$

Revenons au système :
$$(S)\begin{cases} y_1' = a\,y_1 - b\,y_2 \\ y_2' = b\,y_1 + a\,y_2 \end{cases} \qquad J = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

en passant aux coordonnées polaires : on doit calculer y_1' et y_2'

$y_1(t) = r(t)\cos(\theta(t))$ donc $y_1'(t) = r'(t)\cos(\theta(t)) - r(t)\sin(\theta(t)).\theta'(t)$

$y_1(t) = r(t)\cos(\theta(t))$ donc $y_1'(t) = r'(t)\cos(\theta(t)) - r(t)\sin(\theta(t)).\theta'(t)$

$y_2(t) = r(t)\sin(\theta(t))$ " $y_2'(t) = r'(t)\sin(\theta(t)) + r(t)\cos(\theta(t)).\theta'(t)$

Le système (S) s'écrit alors:

$r'\cos\theta - r\sin\theta.\theta' = a.r\cos\theta - b\,r\sin\theta$ (1)

$r'\sin\theta + r\cos\theta.\theta' = b\,r\cos\theta + a\,r\sin\theta$ (2)

on fait (1) $\times\cos\theta$ + (2) $\times\sin\theta$

(1) $\times\cos\theta$: $r'\cos^2\theta - r\sin\theta\cos\theta.\theta' = a\,r\cos^2\theta - b\,r\sin\theta.\cos\theta$

+ (2) $\times\sin\theta$: $r'\sin^2\theta + r\sin\theta\cos\theta.\theta' = b\,r\sin\theta\cos\theta + a\,r\sin^2\theta$

$r'\cos\theta^2 + r'\sin^2\theta = a\,r\cos^2\theta + a\,r\sin^2\theta$

$\Leftrightarrow r'\underbrace{(\cos^2\theta + \sin^2\theta)}_{1} = ar\underbrace{(\cos^2\theta + \sin^2\theta)}_{1}$

$\Leftrightarrow \boxed{r' = ar} \Leftrightarrow \boxed{r(t) = \underset{>0}{k}\,e^{at}}$

si $a>0$ $\lim\limits_{t\to+\infty} r(t) = +\infty$

si $a=0$ $r(t) = k$ pour tout t

si $a<0$ $\lim\limits_{t\to+\infty} r(t) = 0$

d'autre part si on fait (1) $\times\sin\theta$ - (2) $\times\cos\theta$:

$\cancel{r'\cos\theta\sin\theta} - r\sin^2\theta.\theta' = a\,\cancel{r\cos\theta\sin\theta} - b\,r\sin^2\theta$

$- \quad \cancel{-r'\sin\theta\sin\theta} - r\cos^2\theta.\theta' = -b\,r\cos^2\theta - \cancel{a\,r\sin\theta.\cos\theta}$

$-r\sin^2\theta.\theta' - r\cos^2\theta.\theta' = -b\,r\sin^2\theta - b\,r\cos^2\theta$

$\cancel{-}\cancel{r}.\theta'\underbrace{(\sin^2\theta + \cos^2\theta)}_{1} = \cancel{-}b\cancel{r}(\sin^2\theta + \cos^2\theta)$

$\boxed{\theta' = b} \Rightarrow \theta(t) = bt + k$

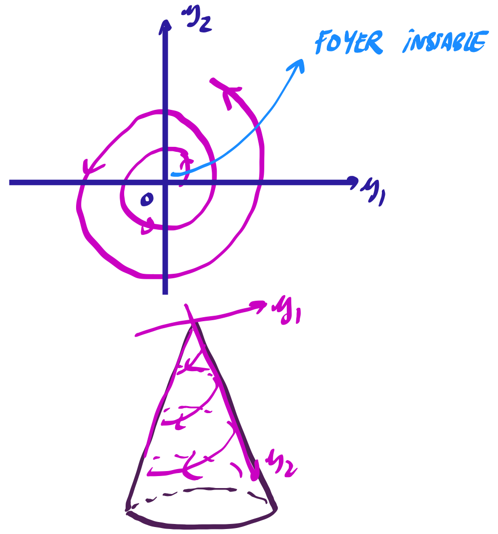
si b est >0 alors ↺

si b est <0 alors ↻

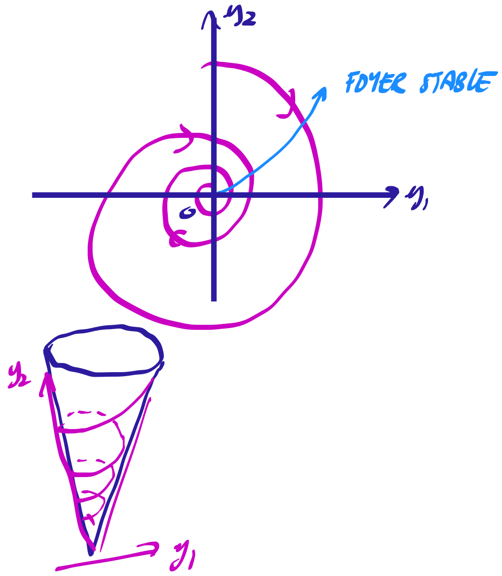
Représentation graphique des solutions :

On a $\lambda_1 = a + ib$

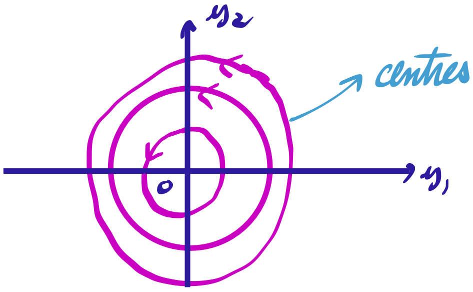
si $\boxed{a > 0}$ et $\boxed{b > 0}$



si $a < 0$ et $b < 0$



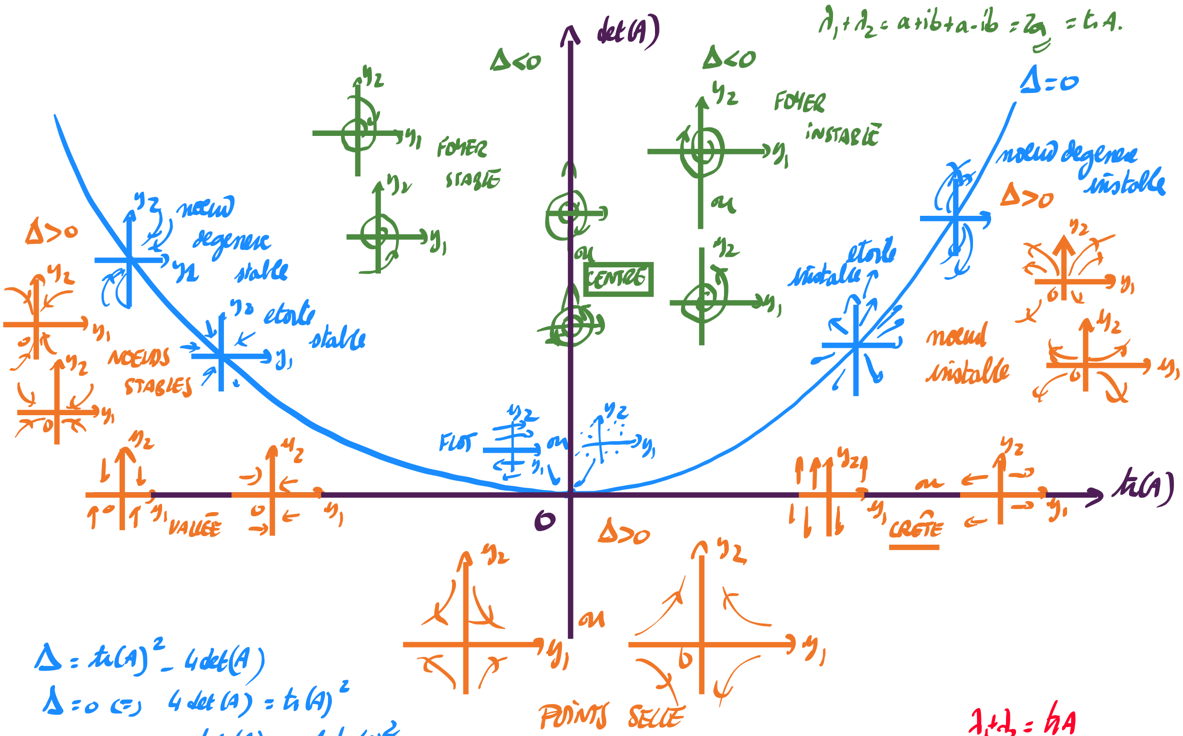
si $\boxed{a = 0 \quad b > 0}$



Exercice : On a le système $X' = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} X$

. chercher $tr(A)$ et $det(A)$
. calculer Δ.
. En déduire λ_1 et λ_2
. Représenter les solutions

$\lambda_1+\lambda_2 = a+ib+a-ib = 2a = \mathrm{tr}\,A.$



$\Delta = \mathrm{tr}(A)^2 - 4\det(A)$

$\Delta = 0 \iff 4\det(A) = \mathrm{tr}(A)^2$

$\iff \det(A) = \frac{1}{4}\mathrm{tr}(A)^2$

$\boxed{\Delta>0} \iff \mathrm{tr}A^2 - 4\det A > 0$

$\iff \mathrm{tr}A^2 > 4\det A$

$\iff \boxed{\frac{1}{4}\mathrm{tr}A^2 > \det A}$ — $\Delta>0$

$\Delta<0$

$\lambda_1+\lambda_2 = \mathrm{tr}A$

$\lambda_1\lambda_2 = \det A$