17 décembre 2024.

II Équations différentielles à retard (EDR)

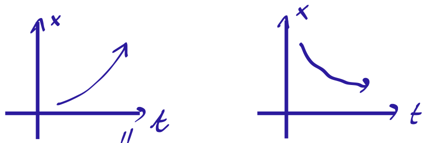
Rappel : équations différentielle ordinaire (EDO)

$x'(t) = f(t, x(t))$: edo NON AUTONOMES ex: $x'(t) = t\cos(x(t))$

$x'(t) = f(x(t))$: edo AUTONOMES ex: $x'(t) = \ln(x(t))$

en dimension 1 : les solutions des edo scalaires autonomes sont monotones (quand elles ne sont pas constantes)

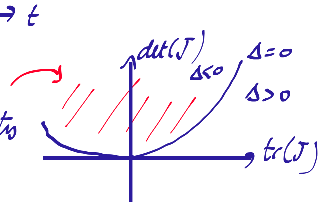
$x' = f(x)$



PAS D'OSCILLATION POSSIBLE !!

en dimension 2 : On peut avoir des oscillations : foyers, centres

mais on ne peut pas avoir de CHAOS



pour avoir du chaos il faut au moins passer à la dimension 3 (par ex: les equations de LORENZ)

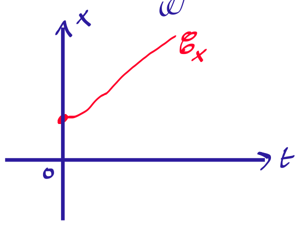
Avec les équations différentielles à retard, une seule équation peut engendrer le CHAOS !

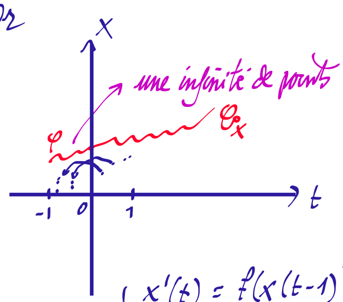
équations différentielles à retard, une seule équation peut engendrer le chaos !

Tout ce qu'on savait sur les edo ne marche plus avec les edr !!

Exemple : le modèle de MACKEY-GLASS

Quelle est la différence entre edo et edr





$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t)) \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R} \end{cases}$$ ⟶ un seul point

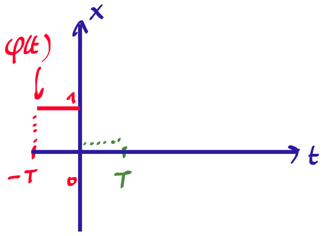
$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t-1)) & t > 0 \\ x(t) = \varphi(t), & t \in [-1,0] \end{cases}$$

$$\varphi \in \mathcal{C}([-1,0];\mathbb{R})$$

A-t-on un résultat d'existence et d'unicité ? Peut-on même calculer la solution de façon explicite ?

Exemple :

$$\begin{cases} x'(t) = -x(t-T) & T>0 \quad t\geq 0 \\ x(t) = \varphi(t) = 1 & \text{sur } [-T,0]. \end{cases}$$



Rappel : si $T=0$ on a $\begin{cases} x'(t) = -x(t) \\ x(0) = 1 \end{cases}$

qui a pour solution $x(t) = e^{-t}$

On suppose ici $T>0$: on calcule la solution sur $[0,T]$

si $0\leq t\leq T$ alors $-T\leq t-T\leq 0$ dans ce cas là $x(t-T) = \varphi(t-T) = 1$

et l'équation devient sur $[0,T]$ $\quad x'(t) = -1$

donc pour tout $t\in[0,T]$ on a $\int_0^t x'(s)ds = \int_0^t -1 ds$

$$\Leftrightarrow x(t) - \underbrace{x(0)}_{=1} = -[s]_0^t = -t+0 = -t$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x(t) = 1-t} \quad , t\in[0,T]$$

Exercice : chercher les solutions sur $[T,2T]$, sur $[2T,3T]$...

De façon générale : sur $[(n-1)T, nT]$ avec $n\in\mathbb{N}^*$

$$x(t) = 1 + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{(t-(k-1)T)^k}{k!}$$

REF. : HAL SMITH
An introduction to delay differential equations with applications to the

applications to the life sciences.

$\boxed{\text{KUANG}}$

Delay differential equations

<u>Remarque</u> : prouver l'existence et l'unicité se fera intervalle par intervalle → pas difficile

par contre exprimer la solution de façon explicite peut devenir très compliqué

même pour des equations très simples (voir exercice précédent)

. On va donc s'intéresser plutôt à l'étude des equilibres et de leur stabilité

. Pour les équilibres : On note x^* un equilibre de $x'(t) = f(x($ "

· **Pour les équilibres :** On note x^* un équilibre de $x'(t) = f(x(t-T))$

Bonne nouvelle : ce sont les mêmes que pour les edo. En effet les équilibres sont des solutions stationnaires donc indépendants du temps. Ils vérifient :

$x^{*\prime} = 0$ ce qui dans l'eqn donne $\boxed{f(x^*) = 0}$ c'est une racine de f.

Une fois les équilibres trouvés on étudie leur stabilité en les perturbant (puis on linéarise le problème).

Pour étudier la stabilité d'un équilibre il faut commencer par étudier le problème linéaire.

1. CAS LINÉAIRE

On considère l'équation suivante, $x'(t) = a\,x(t-1)$ $a \in \mathbb{R}$ (on prend $T=1$), $t \geq 0$

$\boxed{}$ si $\boxed{}$ on a $x'(t) = 0$ pour tout $t \geq 0$

$\boxed{CAS\ 1}$ si $\boxed{a=0}$ on a $x'(t)=0$ pour tout $t \geq 0$

donc $x(t)=k$ (constante) on connaît la solution.

$\boxed{CAS\ 2}$ si $\boxed{a \neq 0}$ étape 1 trouver les equilibres x^*

Les equilibres x^* verifient $x^{*\prime}=0$ c'est à dire $ax^*=0$ avec $a\neq 0$ donc $\boxed{x^*=0}$ est le seul equilibre.

étape 2 : on perturbe l'équilibre

On pose x_p une petite perturbation de $x^*=0$ et on note $x(t)=x^*+x_p(t)$, $t \geq 0$

si $\lim\limits_{t\to+\infty} x_p = 0$ alors x^* est LAS , si $\lim\limits_{t\to+\infty} x_p \neq 0$ alors x^* est instable

On remplace x par x^*+x_p dans l'edr $x'(t)=ax(t-1)$ et on a

$$(x^*+x_p(t))' = a\left(x^*+x_p(t-1)\right)' \quad \begin{pmatrix} x^{*\prime}=0 \\ \text{et} \\ x^*=0 \end{pmatrix}$$

ce qui donne $\boxed{x_p'(t) = a\,x_p(t-1)}$

On cherche ensuite les solutions sous la forme $x_p(t)=e^{\lambda t}$, $\lambda \in \mathbb{C}$

Remarque : il y a une infinité de valeurs propres parce que les edr sont définies en dimension infinie définies en dimension infinie.

<u>étape 3</u> On remplace $x_p(t)$ par $e^{\lambda t}$ dans $x_p'(t) = a x_p(t-1)$

On obtient $\lambda e^{\lambda t} = a e^{\lambda(t-1)} \iff \lambda e^{\lambda t} = a e^{\lambda t - \lambda}$ pour tout $t \geq 0$

$\iff e^{\lambda t}(\lambda - a e^{-\lambda}) = 0$

$\iff \boxed{\lambda - a e^{-\lambda} = 0}$ équation caractéristique

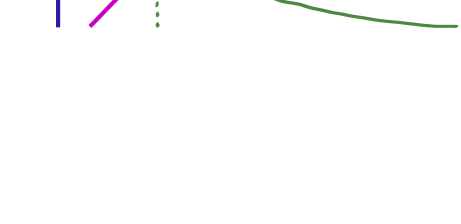
elle n'a pas de solution explicite, on l'appelle équation transcendentale.

Comment déterminer les solutions $\lambda \in \mathbb{C}$?

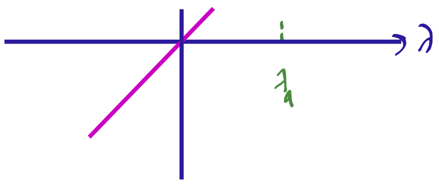
<u>étape 4</u> CAS 1 $\boxed{\text{Si } \lambda \in \mathbb{R}}$ $\lambda = a e^{-\lambda}$

On pose $f(\lambda) = \lambda$ et $g(\lambda) = a e^{-\lambda}$. On cherche $\lambda \in \mathbb{R}$ t.q $f(\lambda) = g(\lambda)$

<u>graphiquement</u> : $\boxed{\text{Si } a > 0}$

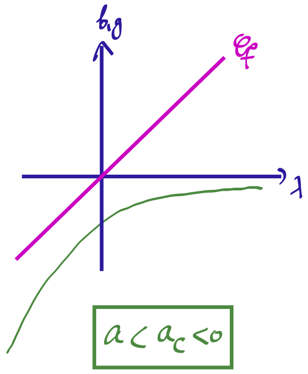


par le théorème des valeurs intermédiaires on a existence et unicité d'un λ_a, et on a même $\lambda_a > 0$

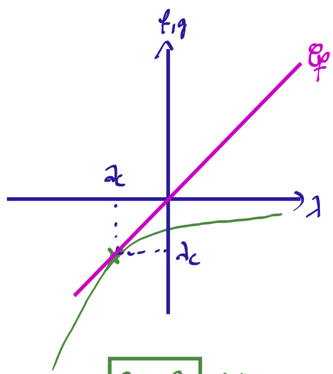


<u>Conclusion</u> : si $a>0$, x^* est INSTABLE

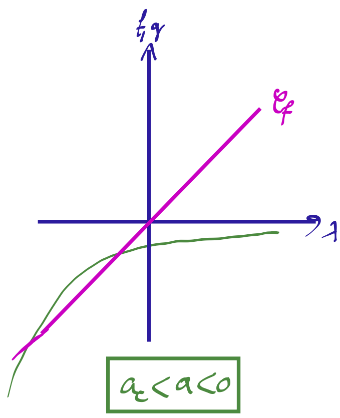
si $\boxed{a<0}$



$\boxed{a < a_c < 0}$



$\boxed{a = a_c} < 0$



$\boxed{a_c < a < 0}$

<u>Calcul de a_c (et de λ_c)</u>

λ_c vérifie pour a_c : $f(\lambda_c) = g(\lambda_c)$

$\Leftrightarrow \lambda_c = a_c e^{-\lambda_c}$

D'autre part le point (λ_c, λ_c) est tangent à $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$

autrement dit λ_c vérifie : $1 = -a_c \cdot e^{-\lambda_c}$

On a donc
$$\begin{cases} \lambda_c = a_c e^{-\lambda_c} & (1) \\ 1 = -a_c \cdot e^{-\lambda_c} & (2) \end{cases}$$

$(1) + (2) \Rightarrow \boxed{\lambda_c = -1}$

et comme $-a_c = e^{\lambda_c}$ donc $a_c = -e^{\lambda_c}$

$= -e^{-1}$

$= \boxed{-\frac{1}{e}}$

La valeur critique a_c vaut $-\frac{1}{e}$ et la valeur propre $\boxed{\lambda_c = -1} < 0$

si $a \in]a_c, 0[$ on peut montrer par le calcul que l'on a 2 valeurs propres réelles < 0

et si $a < a_c$ " " " que l'on a aucune valeur propre réelle.

$\boxed{\text{cas } B}$ si $\lambda \in \mathbb{C}$ <u>càd</u> $\lambda = Re(\lambda) + i\, Im(\lambda)$ avec $\boxed{Im(\lambda) \neq 0}$

↓ sinon on retombe au cas A)

On pose pour simplifier $\lambda = \alpha + i\beta$

On remplace dans l'équation $f(\lambda) = g(\lambda)$

On obtient : $f(\alpha+i\beta) = g(\alpha+i\beta)$

$$\Leftrightarrow \quad \alpha + i\beta = a e^{-(\alpha+i\beta)}$$

$$\Leftrightarrow \quad \alpha + i\beta = a e^{-\alpha} e^{-i\beta}$$

$$= a e^{-\alpha} \left(\cos(-\beta) + \sin(-\beta) \right)$$

$$= a e^{-\alpha} \left(\cos\beta - i \sin\beta \right)$$

Par identification des parties réelles et parties imaginaires:

$$\begin{cases} \alpha = a e^{-\alpha} \cos\beta & (1) \\ \beta = -a e^{-\alpha} \sin\beta & (2) \end{cases}$$

$\beta \neq 0 \quad a < 0$

et on veut savoir si $\alpha < 0$ ou > 0 ?

Pour $a < 0$ (le cas $a > 0$ est déjà connu ; x^* instable)

et pour $\beta \neq 0$

on cherche φ et ψ t.q. $\alpha = \varphi(\beta)$

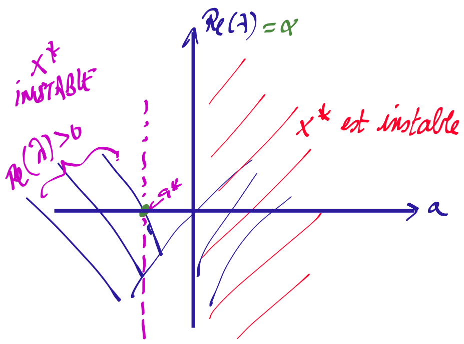
et $a = \psi(\beta)$

$$\begin{cases} y = \varphi(t) \\ x = \psi(t) \end{cases}$$

$\frac{(1)}{(2)}$: $\frac{\alpha}{\beta} = -\frac{\cos\beta}{\sin\beta} = -\text{cotan}(\beta)$ donc $\boxed{\alpha = -\beta\, \text{cotan}(\beta)}\ \boxed{= \varphi(\beta)}$

et dans (2) on a: $\beta = -a e^{-\alpha} \sin\beta$ <u>càd</u> $a = -\frac{\beta}{\sin(\beta)} e^{\alpha}$

on remplace α par $-\beta\, \text{cotan}(\beta)$ et on obtient $\boxed{a = -\frac{\beta}{\sin(\beta)} \cdot e^{-\beta\, \text{cotan}(\beta)} = \psi(\beta)}$



que vaut a^* ?

on cherche la valeur de $a<0$ la plus grande (la proche de 0) t.q. on ait $\boxed{\alpha=0}$ $(Re(\lambda)=0)$

On cherche donc β t.q. $\alpha=0$ et $a<0$ (la + proche de 0)

$$\alpha = -\beta \cotan \beta = -\beta \frac{\cos\beta}{\sin\beta}$$

donc $\alpha=0 \Leftrightarrow \cos\beta=0$

$$\Leftrightarrow \beta = \frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$$

or $\beta = -ae^{-\alpha}\sin\beta$ & $\alpha=0$ $\quad \beta=-a\sin\beta$

si $\beta=\frac{\pi}{2}+k\pi \Leftrightarrow \frac{\pi}{2}+k\pi = -a\underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)}_{\pm 1}$

$$\pm\frac{\pi}{2}+k\pi = a$$

On cherche $a<0$ la plus proche de 0, c.à.d la valeur de k t.q. $\pm\frac{\pi}{2}+k\pi<0$ et le proche de 0. $k=0$ et $\boxed{a=-\frac{\pi}{2}}$

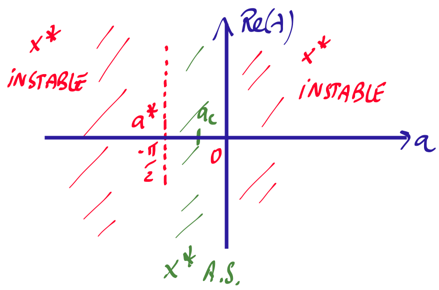
La valeur $a^*<0$ la + proche de 0 pour laquelle $\alpha=0$ est donc $a^*=-\frac{\pi}{2}$

<u>En résumé</u> :

si $a>0$ $\quad x^*=0$ INSTABLE

si $a\in\left]-\frac{\pi}{2},0\right[$ $\quad x^*=0$ A.S. (asymptotiquement stable)

si $a<-\pi/2$ $\quad x^*=0$ INSTABLE



<u>exercice</u> : On considère l'edr $x'(t)=a\,x(t-1)\,(1-x(t-1))$ $\quad$ LOGISTIQUE

$a\neq 0$ $\qquad x'=ax(1-x)$

Il y a 2 equilibres si on pose $f(x)=ax(1-x)$ $\quad f(x)=0 \Leftrightarrow x^*=0$ ou $x^*=1$

<u>Etudions la stabilité de $x^*=1$</u> on considère x_p une petite perturbation et on note $x=x^*+x_p$

l'edr s'écrit alors $(x^*+x_p(t))' = f(x^*+x_p(t-1))$ $\quad$ on linéarise autour de $x^*=1$

l'edr s'écrit alors $(x^* + x_p(t))' = f(x^* + x_p(t-1))$ on linéarise autour de $x^* = 1$

PROBLÈME LINÉARISÉ VAUT : $x_p'(t) = f'(x^*)\, x_p(t-1)$ or $f(x) = ax(1-x) = ax - ax^2$

$$\boxed{x_p'(t) = -a\, x_p(t-1)}$$

$f'(x) = a - 2ax$

$f'(1) = a - 2a = -a$

on a vu que si $x_p'(t) = a\, x_p(t-1)$: x^* est LAS si $a \in]-\frac{\pi}{2}, 0[$

INSTABLE AILLEURS

ici $a = -a$ donc $x^* = 1$ est L.A.S. si $-a \in]-\frac{\pi}{2}, 0[$

càd $\boxed{a \in]0, \frac{\pi}{2}[}$