Université Claude Bernard, Lyon 1
43, boulevard du 11 novembre 1918
69622 Villeurbanne cedex, France

MASTER 1
Ingénierie Mathématique
UE :Systèmes dynamiques Printemps 2015

Contrôle Final Ecrit -Systèmes dynamiques
30 avril 2014

Avant propos.

La durée de l'examen est de 3h. Aucune calculatrice n'est autorisée durant l'épreuve. L'usage des téléphones est prohibé. Seules deux feuilles de notes format A4 sont autorisées. La répartition en durée de chacun des exercices n'est qu'à titre indicatif. La justification des réponses et un soin particulier de la présentation seront demandés et pris en compte lors de la notation.

Exercice 1 (60 minutes) (20 points)

1. (30 min-10 points) On considère le système non linéaire suivant

$$(\mathscr{S}_1) \quad \left\{ \begin{array}{rclclcl} x' &=& -2x &+& 2x^2, && \\ y' &=& -3x &+& y &+& 3x^2. \end{array} \right.$$

   (a) Déterminer le ou les équilibres de $(\mathscr{S}_1)$.

   (b) Trouver les valeurs propres et vecteurs propres associés à ce ou ces équilibres pour le système linéarisé.

   (c) Donner les solutions du système linéarisé autour de ou des équilibres dans la base où la matrice est diagonale (ou de Jordan).

   (d) Tracer les orbites représentant ces solutions.

   (e) Peut-on en déduire les orbites (au-moins localement) autour des équilibres pour le système non linéaire $(\mathscr{S}_1)$?

   (f) Bonus : essayer de proposer un portrait de phase global.

2. (30 min - 10 points) On considère le système non linéaire suivant

$$(\mathscr{S}_2) \quad \left\{ \begin{array}{rcrl} x' &=& y & -(x^2+y^2)x, \\ y' &=& -x & -(x^2+y^2)y. \end{array} \right.$$

   (a) Déterminer le ou les équilibres de $(\mathscr{S}_2)$.

   (b) Trouver les valeurs propres et vecteurs propres associés à ce ou ces équilibres pour le système linéarisé.

   (c) Donner les solutions du système linéarisé autour de ou des équilibres dans la base où la matrice est diagonale (ou de Jordan).

(d) Tracer les orbites représentant ces solutions.

(e) Montrer que l'on ne peut en déduire les orbites autour des équilibres pour le système non linéaire $(\mathscr{S}_2)$?

(f) Considérons alors les parties linéaires et non linéaires de $(\mathscr{S}_2)$. On pose alors

$$V_1 = (y, -x) \text{ et } V_2 = (-(x^2+y^2)x, -(x^2+y^2)y).$$

i. Etudier les directions de la partie linéaire et non linéaire des champs de vecteurs des solutions de $(\mathscr{S}_2)$

ii. En déduire la forme des orbites représentant les solutions.

iii. Bonus : trouver le même résultat en passant par les coordonnées polaires.

Exercice 2 (40 minutes) (10 points)

On considère l'équation différentielle

$$(\mathscr{E}_3) \;\; x'(t) = -\alpha x(t) + f(x(t)),$$

où α est une constante réelle, f une fonction continue sur $\mathbb{R}$, et $t \in I \subset \mathbb{R}$.

1. Montrer que x est solution de $(\mathscr{E}_3)$ sur $I = \mathbb{R}^+$ si et seulement si

$$\begin{cases} x \;\text{ est continue sur } \mathbb{R}^+, \\ \text{et,} \\ x(t) = e^{-\alpha t}x(0) + e^{-\alpha t}\displaystyle\int_0^t e^{\alpha s} f(x(s))ds, \;\; \text{pour tout } t \in \mathbb{R}^+. \end{cases}$$

2. Supposons désormais que $\alpha > 0$, et que f vérifie

$(\mathscr{H}_1)$ " il existe $a, b \in \mathbb{R}$ où $a > 0$ et $\alpha > k > 0$, tels que pour tout $u \in \mathbb{R}$, $|u| \leq a \Rightarrow |f(u)| \leq k|u|$."

Supposons enfin qu'il existe une solution x de l'équation $(\mathscr{E}_3)$ définie sur $\mathbb{R}^+$ et vérifiant l'inégalité suivante

$$(\mathscr{H}_2) \text{ " } |x(t)| \leq a, \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}^+.\text{"}$$

(a) En appliquant un des lemmes de Gronwall, démontrer l'inégalité

$$|x(t)| \leq |x(0)|e^{-(\alpha-k)t} \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}^+.$$

(b) En déduire que x admet une limite nulle quand t tend vers ∞.

(c) Montrer que la fonction $x \equiv 0$ est l'unique solution de $(\mathscr{E}_3)$ sur $\mathbb{R}_+$ vérifiant $x(0) = 0$.

(d) On considère le système suivant

$$(\mathscr{S}_3) \;\; \begin{cases} x' &= -\alpha x(t) + \sin(x(t)), \\ x(0) &= x_0. \end{cases}$$

Donner une condition suffisante sur α pour que les solutions de $(\mathscr{S}_3)$ tendent vers 0 quand t tend vers ∞.

Exercice 3 (40 minutes) (10 points)

On considère le système non linéaire suivant :

$$(\mathscr{S}_4) \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x' & = & \mu x & - & y & + & xy^2, \\ y' & = & x & + & \mu y & + & y^3. \end{array} \right.$$

où x et y sont définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et μ est un nombre réel.
On ne considèrera ici que l'équilibre nul.

1. Montrer que $(0, 0)$ est bien un équilibre de $(\mathscr{S}_4)$.
2. Déterminer les isoclines nulles et les dessiner soigneusement en fonctions des valeurs de μ.
3. En déduire les équilibres en fonctions des valeurs de μ.
4. Etudier la stabilité de ces valeurs en fonction des valeurs de μ.
5. En déduire la nature des bifurcations quand μ varie.
6. Tracer quelques portraits de phase suivant différentes valeurs de μ bien choisies.

Exercice 4 (40 minutes) (10 points)

On considère le système linéaire suivant :

$$(\mathscr{S}_5) \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x' & = & x & + & y & + & \alpha z, \\ y' & = & -x & + & \alpha y & - & z, \\ z' & = & \alpha x & - & y & + & z, \end{array} \right.$$

où x, y et z sont définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et α est un nombre réel.

1. Donner le polynôme caractéristique permettant de trouver les valeurs propres de ce système en fonctions de α.
2. D'après un critère évoqué en cours, donner les conditions sur α pour que l'équilibre soit asymptotiquement stable.
3. Application : on considère $\alpha = 0$

   (a) Vérifier le résultat de la question précédente pour $\alpha = 0$.

   (b) Toujours avec $\alpha = 0$, calculer les valeurs propres, les vecteurs propres de la matrice assocée à $(\mathscr{S}_5)$.

   (c) En déduire les solutions $(\mathscr{S}_5)$ pour $\alpha = 0$.