Université Claude Bernard, Lyon I
43, boulevard 11 novembre 1918
69622 Villeurbanne cedex, France

Licence Sciences, Technologies & Santé
Spécialité Mathématiques
L. Pujo-Menjouet
pujo@math.univ-lyon1.fr

Equations Différentielles Ordinaires et Partielles

Préambule

L'objet de ce cours est de proposer une introduction à l'étude des équations différentielles ordinaires (EDO) et de certaines équations aux dérivées partielles (EDP). Beaucoup de résultats existent dans ce domaine : il est possible de trouver des solutions explicites à ces équations, mais elles ne sont pas nombreuses. La résolution explicite de la plupart des EDO et EDP reste encore un problème ouvert.
Les mathématiciens se sont alors tournés vers une étude plus théorique qui permettait de trouver des résultats sur les solutions (existence, unicité par exemple) sans les connaître explicitement.
Ce cours sera un mélange des deux parce qu'il semble nécessaire de savoir non seulement prouver que des solutions existent et que le cas échéant elles peuvent être unique mais également être capable de résoudre “à la main” certaines EDO et EDP classiques.
Certaines solutions porteront plus d'attention que d'autres, comme les solutions stationnaires (autrement dit indépendantes du temps, si le temps t est la variable impliquée dans l'EDO). Nous nous intéressons à l'étude analytique de ces solutions, autrement dit la stabilité de ces solutions par rapport à des perturbations dans les conditions initiales.
Les EDO et EDP ont des applications dans une très grande variété de domaines physiques, chimiques et biologiques. Il serait trop long d'en faire un liste exhaustive ici, mais au cours des exercices ou exemples certains d'entre eux seront évoqués.
Dans ce cours nous ne donnerons que des exemples d'EDO appliquées à la biologie et à l'écologie. Tous les autres exemples peuvent se trouver dans la littérature foisonnante de ce domaine des mathématiques.

Table des matières

COURS de

Mathématiques III - Analyse

Laurent Pujo-Menjouet
pujo@math.univ-lyon1.fr

Université de Lyon, Université Lyon 1,
CNRS, UMR 5208, Institut Camille Jordan,
Bâtiment du Doyen Jean Braconnier,
43, blvd du 11 novembre 1918,
F - 69222 Villeurbanne Cedex, France

Table des matières

Chapitre 1

Equations différentielles : introduction

1.1 Définitions

Introduisons ici quelques définitions essentielles pour la suite de ce cours.

1.1.1 Différents types d'équations

Définition 1 (EQUATION DIFFERENTIELLE ORDINAIRE)

Une équation différentielle ordinaire, également notée EDO, d'ordre n est une relation entre la variable réelle t, une fonction inconnue $t \mapsto x(t)$ et ses dérivées x', x'',...,$x^{(n)}$ au point t définie par

$$F(t, x, x'', ..., x^{(n)}) = 0, \tag{1.1}$$

où F n'est pas indépendante de sa dernière variable $x^{(n)}$. On prendra t dans un intervalle I de $\mathbb{R}$ (I peut être $\mathbb{R}$ tout entier).
La solution x en général sera à valeurs dans $\mathbb{R}^N$, $N \in \mathbb{N}^*$ où N sera le plus souvent égal à 1, 2 ou 3. On dit que cette équation est scalaire si F est à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Définition 2 (EQUATION DIFFERENTIELLE NORMALE)

On appelle équation différentielle normale d'ordre n toute équation de la forme

$$x^{(n)} = f(t, x, x'', ..., x^{(n-1)}). \tag{1.2}$$

Définition 3 (EQUATION DIFFERENTIELLE AUTONOME)

On appelle équation différentielle autonome d'ordre n toute équation de la forme

$$x^{(n)} = f(x, x'', ..., x^{(n-1)}). \tag{1.3}$$

Autrement dit, f ne dépend pas explicitement de t.

Remarque
Les équations autonomes sont très importantes quand on cherchera des solutions stationnaires ainsi que leur stabilité.

Exemple
Equation du premier ordre sous la forme normale :

$$x' = f(t, x).$$

Equation du premier ordre autonome :

$$x' = f(x).$$

1.1.2 Equation linéaire

Donnons maintenant une classification par linéarité.

Définition 4 (EQUATION DIFFERENTIELLE LINEAIRE)

Une EDO de type (1.1) d'ordre n est linéaire si elle est de la forme

$$a_n(t)x^{(n)}(t) + a_{n_1}(t)x^{(n-1)}(t) + ... + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t) = g(t), \tag{1.4}$$

avec tous les $x^{(i)}$ de degré 1 et tous les coefficients dépendant au plus de t.

Exemple
Dire si les équations différentielles suivantes sont linéaires, ou non linéaires, et donner leur ordre (on justifiera la réponse) :

$$i.\ (x-t)dt + 4tdx = 0 \qquad ii.\ x'' - 2x' + x = 0 \qquad iii.\ \frac{d^3x}{dt^3} + t\frac{dx}{dt} - 5x = e^t$$

$$iv.\ (1-x)x' + 2x = e^t \qquad v.\ \frac{d^2x}{dt^2} + \sin x = 0 \qquad vi.\ \frac{d^4x}{dt^4} + x^2 = 0$$

1.2 Solutions

1.2.1 Définition

Définition 5 (SOLUTION)

On appelle solution (ou intégrale) d'une équation différentielle d'ordre n sur un certain intervalle I de $\mathbb{R}$, toute fonction x définie sur cet intervalle I, n fois dérivable en tout point de I et qui vérifie cette équation différentielle sur I.
On notera en général cette solution (x, I).
Si I contient sa borne inférieure notée a (respectivement sa borne supérieure b), ce sont des dérivées à droite (respectivement à gauche) qui interviennent au point $t = a$ (respectivement $t = b$).
Intégrer une équation différentielle consiste à déterminer l'ensemble de ses solutions.

Définition 6 (COURBE INTEGRALE-ORBITE)

On appelle courbe intégrale l'ensemble des points $(t, x(t))$ où t parcourt I. Autrement dit, si x est à valeurs dans $\mathbb{R}^N$, la courbe intégrale est un ensemble de points de $\mathbb{R}^{N+1}$.
On appelle orbite, l'ensemble des points $x(t)$ où t parcourt I : c'est un ensemble de points de $\mathbb{R}^N$.
L'espace $\mathbb{R}^N$ où les solutions prennent leurs valeurs s'appelle espace de phases.

Interprétation géométrique :

Dans $\mathbb{R}^3$ ($N = 2$) par exemple, une courbe intégrale notée Γ et M un point de cette courbe de coordonnées $x = x_1(t)$, $y = x_2(t)$, et $z = t$. On note $X(t) = (x_1(t), x_2(t))^t$. Le vecteur tangent à Γ en M a pour composante $x_1'(t)$, $x_2'(t)$, et 1. C'est à dire $f_1(t, X(t))$, $f_2(t, X(t))$ et 1 (en notant f_1 et f_2 les composantes de f ici).
Pour une telle équation l'espace des phases est $\mathbb{R}^2$, une orbite a pour équation $x = x_1(t)$, $y = x_2(t)$ et le vecteur tangent en un point a a pour composantes $f_1(t, X(t))$ et $f_2(t, X(t))$.

Exemple
Voir en cours.

Remarque
Il arrive fréquemment qu'on puisse déterminer les orbites sans pouvoir préciser les courbes intégrales.
Dans de nombreuses situations (mais ce n'est pas exclusif), t peut apparaître comme le temps et les orbites comme des trajectoires (que l'on appelle également chroniques).

1.2.2 Solutions maximales et globales

Définition 7 (PROLONGEMENT)

Soient (x, I) et $(\tilde{x}, \tilde{I})$ deux solutions d'une même équation différentielle. On dira que $(\tilde{x}, \tilde{I})$ est un prolongement de (x, I) si $I \subset \tilde{I}$ et $\tilde{x}|_I = x$.

Définition 8 (SOLUTION MAXIMALE)

Soient I_1 et I_2, deux intervalles sur $\mathbb{R}$, tels que $I_1 \subset I_2$.
On dit qu'une solution (x, I_1) est maximale dans I_2 si et seulement si x n'admet pas de prolongement $(\tilde{x}, \tilde{I})$ solution de l'équation différentielle telle que $I_1 \subsetneq \tilde{I} \subset I_2$ (on verra même plus tard que I_1 est nécessairement ouvert).

Définition 9 (SOLUTION GLOBALE)

Soit I un intervalle inclus dans $\mathbb{R}$. Une solution (x, I) est dite globale dans I si elle est définie sur l'intervalle I tout entier..

Remarque
En reprenant les mêmes notations que dans les définitions précédentes, si une solution (x, I_1) peut se prolonger sur l'intervalle I_2 tout entier, alors x est globale dans I_2.

1.3 Réduction à l'ordre 1

Avant de commencer à résoudre les équations différentielles d'ordre quelconque, on va se rendre compte qu'il est possible de réduire l'ordre à 1 en faisant quelques changements de variables. Par conséquent, la majorité des résultats que l'on donnera dans ce chapitre ne concernera que les EDO d'ordre 1 (sauf quelques exceptions, comme l'ordre 2 qui n'est pas difficile et rapide à résoudre (quand on peut le résoudre bien sûr)).
Toutefois, comme nous allons le voir ci-dessous, ce que nous gagnons en simplicité dans l'ordre de dérivation, nous le perdons dans la dimension de l'espace d'arrivée de la fonction F.
Autrement dit, en abaissant l'ordre de l'EDO, nous augmentons la dimension de l'espace d'arrivée de F et passons nécessairement à la résolution d'un système d'EDO d'ordre 1 que l'on apprendra à résoudre que plus tard dans le cours...
Il faut donc être patient, tout en sachant que l'on peut transformer les problèmes difficiles au premier abord, en des problèmes beaucoup plus simples mais un peu plus techniques.
Voici comment on s'y prend.

Méthode

Considérons l'EDO d'ordre n ($n \geq 2$)suivante :

$$F(t, x, x', ..., x^{(n)}) = 0,$$

où, x est valeurs dans $\mathbb{R}^m$ (on prend $m = 1$ en général) et

$$F : \mathbb{R} \times \underbrace{\mathbb{R}^m \times ... \times \mathbb{R}^m}_{n+1 \ \ fois} \to \mathbb{R}^p.$$

Nous avons donc p équations, avec m inconnues et d'ordre n.
On fait le changement d'inconnues $z = (x, x', ..., x^{(n-1)})$. On a alors $z \in (\mathbb{R}^m)^n$, et on note $z = (z_1, z_2, ..., z_n)$, où chacun des $z_i = y^{(i-1)} \in \mathbb{R}^m$, $i = 1, ..., n$. On se retrouve alors avec des relations entre les z_i :

$$\left\{ \begin{array}{ccl} z_i' - z_{i+1} & = & 0, \quad i = 1, 2, ..., n-1 \\ F(t, z_1, z_2, ..., z_n, z_n') & = & 0. \end{array} \right.$$

On a donc $p + m(n-1)$ équations, avec $m \times n$ inconnues, d'ordre 1.

Exemple
Voir en cours.

1.4 Quelques techniques de résolution

Dans cette section, nous allons nous intéresser à différentes techniques pour intégrer (c'est à dire résoudre), certains types d'équations différentielles. Il faut cependant garder à l'esprit que la résolution explicite des EDO n'est pas une chose aisée, et la plupart du temps ce sera trop difficile, voire impossible. Nous devrons alors nous contenter d'une analyse d'existence, unicité, positivité, etc. des solutions.
Mais attardons nous quelques temps à des cas que nous savons résoudre.
Comme nous l'avons montré à la fin de la section précédente, nous allons rester dans le cadre d'équations différentielles ordinaires d'ordre 1. Nous resterons toutefois dans le cas scalaire, parce qu'il est plus facile à manipuler et à comprendre. Le cas où F sera à valeurs dans $\mathbb{R}^p$, $p \in \mathbb{N}^*$ sera traité plus tard.
Commençons alors par un cas assez général, et nous irons vers les cas particuliers ensuite.

1.4.1 Equations à variables séparées

Exemple
Considérons l'EDO d'ordre 1 sous forme normale données par l'équation

$$x' = f(t, x).$$

L'idée est d'exprimer $f(t, x)$ sous la forme $g(t)h(x)$, où $g : I \to \mathbb{R}$ et $h : J \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Ce qui permettra de résoudre une équation du type

$$x' = g(t)h(x).$$

Cas particulier :
Les équations les plus simples sont de la forme

$$x' = f(t),$$

avec $h \equiv 1$ *et* $g(t) = f(t)$ *pour tout* $t \in I$. *On suppose en outre que* $x(t_0) = x_O$ *pour un* $t_0 \in I$. *Si on suppose que* f *est continue sur un intervalle* $I \subset \mathbb{R}$ *d'intérieur non vide. Les solutions de cette équation sont données par*

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s)ds,$$

Définition 10 (EQ. A VARIABLES SEPAREES)

On appelle de façon générale équation à variables séparées, toute équation de la forme

$$b(x)x' = a(t), \tag{1.5}$$

où a et b sont deux fonctions définies respectivement sur I et K, et où I et K sont des intervalles de $\mathbb{R}$.

Théorème 1 (VARIABLES SEPAREES)

Supposons les applications a et b continues respectivement sur I et K, où I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, et $J \subset \mathbb{R}$, alors x est solution de l'équation

$$b(x)x' = a(t),$$

si et seulement si :

1. x est dérivable sur I, ET
2. il existe $c \in \mathbb{R}$, constante telle que $B(x(t)) = A(t) + c$, pour tout $t \in I$, avec, A est une primitive de a sur J, et B est une primitive de b sur K.

Théorème 2 (VARIABLES SEPAREES (2))

Si I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, toute fonction x continue sur I qui satisfait $B(x(t)) = A(t)+c$ pour tout $t \in I$ pour une certaine valeur de c et qui satisfait la condition $b(x(t)) \neq 0$ pour tout $t \in I$ est dérivable sur I.
Par conséquent, d'après le théorème qui précède on en conclut que x est solution de

$$b(x)x' = a(t), \quad \text{sur} \quad I.$$

Définition 11 (EQ. A VARIABLES SEPARABLES)

Soit $f(t, x, x') = 0$, où $t \in I$, I intervalle de $\mathbb{R}$, une équation différentielle. On dit que c'est une équation à variables séparables si cette équation peut s'écrire sous la forme

$$b(x)x' = a(t), \quad \text{pour} \quad t \in I, \quad \text{et} \quad x \in K \subset \mathbb{R}.$$

1.4.2 Equations scalaires autonomes

Comme nous l'avons vu un peu plus haut les équations scalaires autonomes sont de la forme

$$x' = f(x).$$

On remarque que $x \equiv a$ avec a racine de f est nécessairement une solution de ce type d'équations. On a également une propriété importante concernant la monotonie de la fonction f.

Proposition 1 (AUTONOME ET MONOTONE)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue sur I un intervalle de $\mathbb{R}$, alors toute solution non triviale de l'équation scalaire autonome $x' = f(x)$ est monotone sur son domaine.

1.4.3 Equations linéaires

Nous restons toujours sur les EDO d'ordre 1. Nous nous intéressons ici aux équations différentielles ordinaires linéaires.

Définition 12 (EDO LINEAIRE)

Une équation différentielle du premier ordre est dite linéaire si elle est linéaire par rapport à la fonction inconnue x et par rapport à sa dérivée x'. Une telle équation peut toujours s'écrire sous la forme

$$a(t)x' + b(t)x = d(t). \tag{1.6}$$

Dans toute la suite, on supposera que a, b et d sont continues sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$.

EDO linéaire sans second membre

Commençons par résoudre une équation linéaire d'ordre 1 sans second membre. On l'appelle EDO linéaire du premier ordre homogène. C'est une équation de la forme

$$a(t)x' + b(t)x = 0. \tag{1.7}$$

C'est une équation à variables séparables sur $I \times J$ tel que $a(t) \neq 0$ pour tout $t \in I$.
Il est à noter que $x \equiv 0$ est une solution de l'équation linéaire homogène ci-dessus. On l'appelle solution triviale comme dans le cas des équations autonomes.

Proposition 2 (SOL. EQ. HOMOGENES)

L'ensemble des solutions de l'équation linéaire homogène

$$a(t)x' + b(t)x = 0.$$

sur le domaine I, avec pour un certain t_0 dans I tel que $x(t_0) = x_0$ est définie pour tout $t \in I$ par

$$x(t) = x_0 e^{F(t)},$$

avec $F(t) = \displaystyle\int_{t_0}^{t} -\frac{b(s)}{a(s)}$.

Proposition 3 (SOLUTION TRIVIALE)

Si une solution de l'équation linéaire homogène s'annule en au-moins un point t_0 alors elle est identiquement nulle (solution triviale).

Remarque
La solution $x \equiv 0$ sur I est appelée intégrale dégénérée de l'équation linéaire homogène.

EDO linéaire avec second membre

Considérons l'équation

$$a(t)x' + b(t)x = d(t),$$

sur l'intervalle I où a ne s'annule pas.
Soit x_h une solution particulière non dégénérée de l'équation homogène associée à l'équation ci-dessus sur I.

Proposition 4 (SOLUTION GENERALE)

La solution générale de l'équation

$$a(t)x' + b(t)x = d(t),$$

sur I avec pour un certain t_0 dans I tel que $x(t_0) = x_0$ est donnée par

$$x(t) = \exp\left(-\int_{t_0}^{t} \frac{b(s)}{a(s)} ds\right) \left(x_0 + \int_{t_0}^{t} \frac{d(s)}{a(s)} \exp\left(\int_{t_0}^{s} \frac{b(\sigma)}{a(\sigma)} d\sigma\right) ds\right).$$

Remarque
La méthode fréquemment utilisée pour trouver une solution de l'équation linéaire non homogène à partir de l'équation homogène est appelée méthode de variation de la constante.

Cas particulier

Proposition 5 (FORMULE DE DUHAMEL)

Soient une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, α une constante réelle et $t_0 \in I$ tel que $x(t_0) = x_0$. La solution générale de l'équation scalaire

$$x' = \alpha x + f(t),$$

est donnée par

$$x(t) = x_0 e^{\alpha(t-t_0)} + \int_{t_0}^{t} e^{\alpha(t-s)} f(s) ds,$$

où c est une constante.

1.4.4 Equations de Bernoulli

Définition 13 (EQUATION DE BERNOULLI)

Une équation de Bernoulli est une équation différentielle scalaire non linéaire de la forme

$$x' + P(t)x + Q(t)x^r = 0, \tag{1.8}$$

où $r \in \mathbb{R}$, P et Q sont deux fonctions définies et continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Remarque
On peut éliminer les cas $r = 0$ et $r = 1$, car l'équation de Bernoulli correspond alors à une équation que l'on connaît déjà et que l'on a traité dans la section précédente.

Théorème 3 (SOLUTION BERNOULLI)

Une fonction dérivable strictement positive (au cas où $r = 1/2$ par exemple, où $r \leq 0$) x sur I est solution de l'équation de Bernoulli si et seulement si $u = x^{1-r}$ est une solution strictement positive de l'équation linéaire

$$u' + (1-r)P(t)u + (1-r)Q(t) = 0. \tag{1.9}$$

Remarque

1. *Connaissant la solution u de l'équation linéaire associée à l'équation de Bernoulli, on peut en déduire les solutions strictement positives de l'équation de Bernoulli.*
2. *Nous pouvons trouver quelques propriétés sur les solutions suivant les valeurs de r :*
   a. *Si $r > 0$ l'équation de Bernoulli admet la solution triviale $x \equiv 0$.*
   b. *Si $r > 1$ toute solution de l'équation de Bernoulli qui prend la valeur 0 en un point, est partout nulle.*
   c. *Si $0 < r < 1$, la fonction nulle n'est pas nécessairement la seule solution qui prenne la valeur 0 en un point.*
3. *L'équation particulière*
$$t^2 x' + x + x^2 = 0, \tag{1.10}$$
est appelée équation de Ricatti.

1.4.5 Eq.de Lagrange et Clairaut

Définition 14 (EQUATION DE LAGRANGE)

On appelle équation de Lagrange toute équation du premier ordre scalaire non linéaire de la forme
$$x = tf(x') + g(x'), \tag{1.11}$$
où f et g sont définies, dérivables sur un certain intervalle J de $\mathbb{R}$.

Définition 15 (EQUATION DE CLAIRAUT)

On appelle équation de Clairaut toute équation de Lagrange avec $f \equiv Id$ (où Id est la fonction identité, c'est à dire $Id(x) = x$), autrement dit elle est de la forme
$$x = tx' + g(x'), \tag{1.12}$$
où g est définie, dérivable sur un certain intervalle J de $\mathbb{R}$.

Proposition 6 (SOLUTIONS LAGRANGE)

Les seules solutions affines de l'équation de Lagrange sont les fonctions de la forme
$$x(t) = mt + g(m), \tag{1.13}$$
où m est une racine de l'équation $m = f(m)$ avec $m \in J$.

Remarque
Si de telles fonctions existent, alors elles sont globales sur $\mathbb{R}$.

En particulier, pour tout $m \in J$ les fonctions $t \mapsto mt + g(m)$ sont les seules fonctions affines solutions de l'équation de Clairaut et elles sont globales sur $\mathbb{R}$.

1.5 Eq. Diff. Totales - Facteurs Intégrants

L'objectif de cette section est voir comment la résolution d'une équation différentielle non -linéaire du premier ordre peut se résoudre assez facilement à partir de la notion de différentielle de fonction.

1.5.1 Equations aux différentielles totales

Définition 16 (VARIATION INFINITESIMALE)

On appelle variation infinitésimale de t (respectivement de x), toute fonction définie par

$$\begin{array}{rlll} dt: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}, \\ & (u,v) & \mapsto & dt(u,v) = u, \end{array} \qquad (resp.) \quad \begin{array}{rlll} dx: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (u,v) & \mapsto & dy(u,v) = v. \end{array}$$

Définition 17 (DIFFERENTIELLE)

(voir cours Analyse III) Etant donnée une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, continue sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$, et admettant des dérivées partielles du premier ordre en tout point de U, on appelle différentielle de f sur U l'application notée df telle que pour tout $(t,x) \in U$ et pour tout $(u,v) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{array}{rlll} df(t,x): & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (u,v) & \mapsto & \dfrac{\partial f}{\partial t}(t,x)(u) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(t,x)(v). \end{array}$$

Remarque

Avec la notation de la variation infinitésimale, pour tout $(t,x) \in U$ et pour tout $(u,v) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$df(t,x)(u,v) = \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)dt(u,v) + \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)dx(u,v),$$

que l'on peut écrire sous la forme

$$df(t,x) = \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)dt + \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)dx \tag{1.14}$$

Opérations utilisées :

1. $df = 0$ est équivalent à $f(t,x) = c$ où c est une constante pour tout $(t,x) \in U$, U ouvert connexe de $\mathbb{R}^2$ (attention, il est important que U soit connexe (voir cours de calcul différentiel pour cela).
2. $d(f + \lambda g = df + \lambda g$ où λ est une constante.
3. Différentielle du produit : $dfg = fdg + gdf$
4. Changement de variables :
   si on pose $t = \varphi(s,h)$ et $x = \psi(s,h)$
   alors
   $$dt = d\varphi(s,h) = \frac{\partial\varphi}{\partial s}ds + \frac{\partial\varphi}{\partial h}dh, \text{ et } dx = d\psi(s,h) = \frac{\partial\psi}{\partial s}ds + \frac{\partial\psi}{\partial h}dh,$$
   et dans ce cas :
   $$\begin{aligned} df &= \frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{\partial f}{\partial x}dx, \\ &= \frac{\partial f}{\partial t}[\frac{\partial\varphi}{\partial s}ds + \frac{\partial\varphi}{\partial h}dh] + \frac{\partial f}{\partial x}[\frac{\partial\psi}{\partial s}ds + \frac{\partial\psi}{\partial h}dh], \\ &= [\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial\varphi}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial s}]ds + [\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial\varphi}{\partial h} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial h}]dh. \end{aligned}$$
   On peut également retrouver ce résultat en utilisant un diagramme en arborescence (voir exemple en cours)
5. Soient $f : U \to \mathbb{R}$, et z une fonction dérivable sur $I \subset \mathbb{R}$ telle que G(z)={$(s, z(s))$, pour tout $s \in I$}$\subset U$ (graphe de z) ; et soit
   $$\begin{array}{rccl} g : & I & \to & \mathbb{R} \\ & s & \mapsto & g(s) = f(s, z(s)), \end{array}$$
   on a alors,
   $$dg = \frac{\partial f}{\partial s}ds + \frac{\partial f}{\partial z}dz(s),$$
   ce qui donne également
   $$g'(s) = \frac{\partial f}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial z}z'(s)$$

Cette dernière remarque va nous permettre d'écrire l'équation différentielle non linéaire présentée dans la définition suivante sous forme différentielle.

Définition 18 (EQ. AUX DIFFERENTIELLES TOTALES)

Considérons l'équation différentielle suivante

$$a(t,x) + b(t,x)x' = 0, \tag{1.15}$$

que l'on peut écrire plus généralement sous la forme

$$a(t,x)dt + b(t,x)dx = 0. \tag{1.16}$$

Supposons a et b continues sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$. On dit que l'équation (1.16) est une équation aux différentielles totales si et seulement si la fonction

$$f : (t,x) \to f(t,x) = a(t,x)dt + b(t,x)dx,$$

est la différentielle d'une certaine fonction

$$w : \begin{cases} U & \to & \mathbb{R} \\ (t,x) & \mapsto & w(t,x) \end{cases}$$

Autrement dit, il existe w telle que $f = dw$.

Remarque
Si l'équation (1.16) est une équation aux différentielles totales, alors il existe w telle que $dw = f$ et alors l'équation (1.16) s'écrit $dw(t,x) = 0$, c'est dire $w(t,x) = c$, c constante.
Autrement dit, $\{(t,x) \in U, w(t,x) = c\}$ est l'ensemble de toutes les courbes intégrales de l'équation (1.15).

Remarque
Parmi les courbes intégrales $w(t,x) = c$, on cherche les solutions x de l'équation (1.15) en résolvant $w(t,x) = c$ par rapport à x pour toutes les valeurs possibles de c.

Grâce au théorème des fonctions implicites (voir cours Analyse III), nous avons le résultat suivant :

Proposition 7 (EXISTENCE)

Pour tout $(t_0, x_0) \in U$ dans lequel $\dfrac{\partial w}{\partial x}$ n'est pas nulle, il passe au moins une solution de l'équation (1.15) et la fonction x correspondante s'obtient en résolvant par rapport x au voisinage de (t_0, x_0), l'équation $w(t,x) = w(t_0, x_0)$.

Il existe un moyen classique de reconnaître une différentielle totale. Ce moyen est donné dans le théorème suivant.

Théorème 4 (CNS DIFFERENTIELLE TOTALE)

Soient $(t,x) \mapsto a(t,x)$ et $(t,x) \mapsto b(t,x)$ deux fonctions continues sur un pavé $U = I \times J$. Supposons que $\dfrac{\partial a}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial b}{\partial t}$ existent et sont continues sur U alors $f : (t,x) \to (t,x) = a(t,x)dt + b(t,x)dx$ est une différentielle totale si et seulement si pour tout $(t,x) \in U$

$$\frac{\partial a}{\partial x}(t,x) = \frac{\partial b}{\partial t}(t,x). \tag{1.17}$$

1.5.2 Equation des facteurs intégrants

Considérons l'équation

$$a(t,x)dt + b(t,x)dx = 0 \tag{1.18}$$

Supposons que a et b sont continues sur un pavé ouvert $U = I \times J$.

Définition 19 (FACTEURS INTEGRANTS)

On appelle facteur intégrant de l'équation (1.18) une fonction $\mu : (t,x) \mapsto \mu(t,x)$ définie, continue et sans zéro sur U (c'est à dire que $\mu(t,x) \neq 0$ pour tout $(t,x) \in U$) telle que

$$\frac{\partial}{\partial x}(\mu a) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu b), \tag{1.19}$$

sur U.

Remarque

Si $f(t,x) = a(t,x)dt + b(t,x)dx = 0$ est une équation aux différentielle totale alors pour tout $\mu \equiv k$ (constante $\neq 0$), μ est un facteur intégrant de l'équation (1.18).

Proposition 8 (EQ. FACTEURS INTEGRANTS)

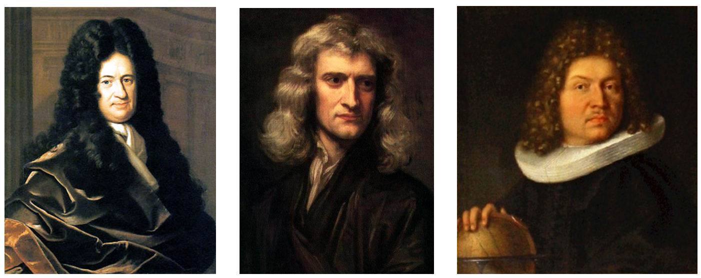
Supposons en plus des propriétés spécifiques ci-dessus que les fonctions a, b et μ possèdent des dérivées partielles du premier ordre continues sur $I \times J$. Dans ce cas μ est un facteur intégrant de (1.18) si et seulement si

$$a\frac{\partial \mu}{\partial x} + \mu\frac{\partial a}{\partial x} - b\frac{\partial \mu}{\partial t} - \mu\frac{\partial b}{\partial t} = 0 \ \text{ sur } \ U$$

ou bien

$$a\frac{\partial \mu}{\partial x} - b\frac{\partial \mu}{\partial t} + (\frac{\partial a}{\partial x} - \frac{\partial b}{\partial t})\mu = 0 \ \text{ sur } \ U.$$

avec $\mu(t,x) \neq 0$ pour tout $(t,x) \in U$.
C'est l'équation des facteurs intégrants.



(a) Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716), mathématicien allemand, Il est à l'origine du terme de « fonction » (1692, de functio : exécution), de celui de « coordonnées », de la notation du produit de a par b sous la forme a.b ou ab, d'une définition logique de l'égalité, du terme de « différentielle » (qu'Isaac Newton appelle « fluxion »), de la notation différentielle , du symbole $\int_{t0}^{t} f(s)ds$ pour l'intégrale.

(b) Sir Isaac Newton (1642–1727), Newton partage avec Gottfried Wilhelm Leibniz la découverte du calcul infinitésimal. Dans l'histoire du calcul infinitésimal, le procès de Newton contre Leibniz est resté célèbre. Newton et Leibniz avaient trouvé l'art de lever les indéterminations dans le calcul des tangentes ou dérivées.

(c) Jacques ou Jakob Bernoulli (1654-1705) mathématicien et physicien suisse, frère de Jean Bernoulli et oncle de Daniel Bernoulli et Nicolas Bernoulli. Sa correspondance avec Gottfried Wilhelm Leibniz le conduit à étudier le calcul infinitésimal en collaboration avec son frère Jean. Il fut un des premiers à comprendre et à appliquer le calcul différentiel et intégral, proposé par Leibniz.

FIGURE 1.1 – Quelques mathématiciens célèbres liés aux dérivées et équations différentielles.

Chapitre 2

Théorie générale : existence et unicité

L'objectif de ce chapitre est d'étudier l'existence et l'unicité locale et globale des problèmes de Cauchy (c'est à dire une équation différentielle ordinaire pour laquelle on a donné une condition initiale) sans connaître explicitement les solutions.
Comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent, nous n'aurons pas besoin de traiter les équations différentielles d'ordre n étant donné que l'on est capable de se ramener à l'ordre 1. Par conséquent, nous ne donnerons les résultats que pour les EDO d'ordre 1 ici, sous forme normale, autrement dit, du type

$$x' = f(t,x),$$

où x est la fonction inconnue de la variable réelle t à valeurs dans un espace $\mathbb{R}^m$, et f sera une fonction donnée sur $I \times J$, ouvert,non vide de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$. Dans certains résultats, on verra même que l'on peut prendre f définie de façon générale sur un ouvert non vide $U \subset \mathbb{R}^{m+1}$. Nous verrons qu'il faut faire des hypothèses de régularité sur la fonction f afin d'obtenir des résultats d'existence et d'unicité des solutions.
Il est possible, mais nous ne l'aborderons pas ici, d'obtenir l'existence de solutions en supposant f continue (attention on reste en dimension finie ici) en faisant appel au théorème d'Ascoli qui n'est pas au programme. C'est ce qu'on appelle le théorème de Peano.
Il est même possible de montrer l'existence de solutions généralisées, c'est à dire de fonctions *a priori* seulement continues satisfaisant $x(t) = x(t_0) + \displaystyle\int_{t_0}^{t} f(s, x(s)ds$, pour des fonctions f discontinues. Le premier résultat est attribué à Carathéodory, on a d'ailleurs gardé son nom pour nommé ces solutions. Ces résultats ont été améliorés par A.F Filipov, et V.V Vilipov.
Tous ces résultats ne seront pas au programme de ce cours, mais peuvent faire l'objet d'étude approfondie pour les lecteurs désireux d'en savoir plus.
L'unicité des solutions quant à elle, pour une donnée initiale fixée nécessite une hypothèse plus forte que la continuité de f. Des hypothèses plus faibles que celles énoncées dans ce cours sont exposés dans les travaux de Osgood et Nagumo. Mais nous ne les aborderons pas ici. Nous nous contenterons de considérer f lipschitzienne par rapport à sa seconde variable. Ce qui sera déà pleinement satisfaisant pour nous.
Lors de la preuve de certaines propositions ou théorèmes, nous aurons besoin de résultats préliminaires importants et “classiques” et plus particulièrement du lemme de Gronwall et du théorème de point fixe de Banach-Picard que nous rappelons dans les sections suivantes.

2.1 Lemme de Gronwall

2.1.1 Inéquations différentielle

Lemme 1 (GRONWALL-INEQUATION DIFFERENTIELLE)

Supposons qu'une fonction x de classe $\mathscr{C}^1(I, \mathbb{R})$, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$, vérifie

$$x'(t) \leq a(t)x(t) + b(t), \tag{2.1}$$

où a et b sont des fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$, et $x(t_0) = x_0$ pour un $t_0 \in I$. Alors, on a l'inégalité

$$x(t) \leq x(t_0)\exp(\left(\int_{t_0}^{t} a(s)ds\right) + \int_{t_0}^{t} \exp(\left(\int_{s}^{t} a(\sigma)d\sigma\right) b(s)ds \tag{2.2}$$

Preuve :
Faite en cours.

2.1.2 Inéquations intégrales

Lemme 2 (GRONWALL-INEQUATION INTEGRALE)

Supposons qu'une fonction x continue de $I = [0, T]$ sur $\mathbb{R}^+$, $T \in \mathbb{R}$ (attention on ne s'intéresse qu'aux fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^+$), vérifie

$$x(t) \leq b(t) + \int_0^t a(s)x(s)ds, \tag{2.3}$$

pour tout $t \in I$, où a est une fonction continue de I dans $\mathbb{R}^+$ et b une fonction continue de I dans $\mathbb{R}$. Alors, on a l'inégalité

$$x(t) \leq b(t) + \int_0^t \exp(\left(\int_s^t a(\sigma)d\sigma\right) b(s)a(s)ds, \tag{2.4}$$

pour tout $t \in [0, T]$.

Preuve :
Faite en cours.

Remarque

1. *Si b est une constante dans la formulation intégrale, l'inégalité de Gronwall peut se simplifier et on l'écrit :*
$$x(t) \leq b \exp\left(\int_0^t a(s)ds\right). \tag{2.5}$$
2. *On peut également écrire une formule analogue avec un point t_0 quelconque au lieu de 0. Mais il faut alors penser à mettre des valeurs absolues si les bornes intégrales ne sont pas dans l'ordre croissant.*
On aurait ainsi, avec $b \geq 0$ constante par exemple, si x continue sur I vérifie
$$x(t) \leq b + \left|\int_{t_0}^t a(s)x(s)ds\right|, \tag{2.6}$$
pour tout $t \in I$, et $t_0 \in I$ donné, alors
$$x(t) \leq b \exp\left(\left|\int_{t_0}^t a(s)ds\right|\right). \tag{2.7}$$

3. *Si b est dérivable , on peut donner une autre version de l'inégalité de Gronwall en intégrant par parties, et on obtient (avec les hypothèses du lemme sous formulation intégrale),*
$$x(t) \leq b(0) \exp\left(\int_0^t a(s)ds\right) + \int_0^t b'(s) \exp\left(\int_s^t a(\sigma)d(\sigma)\right) ds, \tag{2.8}$$
pour tout $t \in [0, T]$.

2.2 Théorème de Point Fixe de Banach-Picard

Nous rappelons ici le théorème de point fixe de Banach-Picard seulement en sur $\mathbb{R}$ en sachant que le résultat est vrai pour un ensemble fermé non vide d'un espace de Banach E.

Théorème 1 (BANACH-PICARD)

Soit I un intervalle fermé non vide $\mathbb{R}$ et $f : I \to I$ est contractante, c'est à dire qu'il existe $k \in]0, 1[$, tel que
$$|f(t_1) - f(t_2)| \leq k|t_1 - t_2|, \tag{2.9}$$
pour tous t_1 et t_2 dans I. Alors il existe un unique $t \in I$ tel que $f(t) = t$.

Preuve :
Pas faite en cours.
Nous pouvons désormais énoncer des résultats d'existence et d'unicité locale et globale. Nous allons le faire dans le cadre d'une dimension supérieure ou égale à 1 pour deux raisons principales :
- nous éviterons d'être redondants quand nous aborderons la section des systèmes d'équations différentielles,
- d'autre part, comme dans le chapitre précédent, nous resterons dans l'étude des équations d'ordre 1 étant donné que l'on peut toujours se ramener à cet ordre quitte à augmenter le nombre d'équations et donc la dimension de l'espace du problème.

2.3 Théorème de Cauchy-Lipschitz

2.3.1 Problème de Cauchy

Soit U un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ et $f : U \to \mathbb{R}^m$ une fonction. On note $\|.\|$ une norme quelconque sur $\mathbb{R}^m$ (on a vu en analyse III que toutes les normes sont équivalentes sur $\mathbb{R}^m$.

Définition 1 (PROBLEME DE CAUCHY)

Etant donnée une équation différentielle du premier ordre sous forme normale

$$x' = f(t, x), \tag{2.10}$$

pour $(t, x(t)) \in U$, et un point $(t_0, x_0) \in U$, le problème de Cauchy correspondant est la recherche des solutions x telles que

$$x(t_0) = x_0. \tag{2.11}$$

Notation :
On note le problème de Cauchy de la façon suivante

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x' & = & f(t, x), \\ x(t_0) & = & x_0. \end{array} \right. . \tag{2.12}$$

Définition 2 (SOLUTION DU PROBLEME DE CAUCHY)

Une solution du problème de Cauchy (2.12) sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ avec la condition initiale $(t_0, x_0) \in U$ et $t_0 \in I$ est une fonction dérivable $x : I \to \mathbb{R}^m$ telle que

i. pour tout $t \in I$, $(t, x(t)) \in U$,
ii. pour tout $t \in I$, $x'(t) = f(t, x(t))$,
iii. $x(t_0) = x_0$.

Théorème 2 (SOLUTIONS DE (2.12))

Supposons $f : U \to \mathbb{R}^m$ continue. Soit $(t_0, x_0) \in U$ et x une fonction définie sur un intervalle ouvert I contenant t_0 et à valeurs dans $\mathbb{R}^m$.
Une fonction x est solution de (2.12) sur I si et seulement si

i. pour tout $t \in I$, $(t, x(t)) \in U$,
ii. x est continue sur I,
iii. pour tout $t \in I$, $x(t) = x_0 + \displaystyle\int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds$.

Preuve :
Faite en cours.

2.4 Existence et unicité locale

Enonçons tout d'abord un résultat local d'existence et d'unicité .

Théorème 3 (CAUCHY LIPSCHITZ)

Soient $f \in \mathscr{C}(U; \mathbb{R}^N)$ où U est un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$, et $(t_0, x_0) \in U$. On suppose f lipschitzienne par rapport à sa variable x sur un voisinage de (t_0, x_0), c'est à dire qu'il existe un voisinage de (t_0, x_0) dans U et $L > 0$ tel que pour tous (t, x) et (t, y) dans ce voisinage

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L\|x - y\|. \tag{2.13}$$

Alors on a les propriétés suivantes.

Existence : Il existe $T > 0$ et $x \in \mathscr{C}^1([t_0 - T, t_0 + T]; J)$ solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} x' &= f(t, x), \\ x(t_0) &= x_0. \end{cases} .$$

Unicité : Si y est une autre solution du problème de Cauchy ci-dessus, elle coïncide avec x sur un intervalle d'intérieur non vide inclus dans $[t_0 - T, t_0 + T]$.

Régularité Si de plus f est de classe $\mathscr{C}^r$, $r \geq 1$, alors x est de classe $\mathscr{C}^{r+1}$.

Preuve :
Faite en cours.

Remarque

1. *Dès que f est de classe $\mathscr{C}^1$ elle est localement lipschitzienne (ce résultat découle du théorème des accroissements finis). C'est un résultat connu découlant du théorème des accroissements finis.*
2. *A partir de maintenant, on considère un cas, légèrement plus particulier (pour simplifier les énoncés des propriétés), où f est définie sur $I \times J$, avec I un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$ et J un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}^m$ et non plus sur un domaine ouvert quelconque U inclus dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$.*

2.5 Unicité globale

Le résultat précédent donne seulement un résultat d'unicité local. On peut en déduire un résultat d'unicité globale grâce à l'énoncé suivant.

Définition 3 (LOCALEMENT LIPSCHITZIEN)

Soient $f \in \mathscr{C}(I \times J; \mathbb{R}^m)$ où I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et J est un ouvert d'un espace $\mathbb{R}^m$, et $(t_0, x_0) \in I \times J$. On dit que fonction f est localement lipschitzienne par rapport à sa variable x si pour tout $(t_1, x_1) \in I \times J$, il existe un voisinage de ce point dans $I \times J$ et $L > 0$ tel que pour tous (t, x) et (t, y) dans ce voisinage ,

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq L\|x - y\|. \tag{2.14}$$

Lemme 3 (UNICITE GLOBALE)

Soient $f \in \mathscr{C}(I \times J; \mathbb{R}^n)$ où I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et J est un ouvert d'un espace $\mathbb{R}^n$, et $(t_0, x_0) \in I \times J$. On suppose f localement lipschitzienne par rapport à sa variable x. Si $x_1 \in \mathscr{C}^1(I_1; J)$ et $x_2 \in \mathscr{C}^1(I_2; J)$ sont deux solutions sur des intervalles I_1 et I_2 respectivement, et s'il existe $t_0 \in I_1 \cap I_2$ tel que $x_1(t_0) = x_2(t_0)$ alors $x_1(t) = x_2(t)$ pour tout $t \in I_1 \cap I_2$.

Remarque
Une conséquence de ce lemme est qu'il existe un plus grand intervalle $\tilde{I}$ sur lequel le problème de Cauchy (2.12) admet une solution. Cette unique solution sur l'intervalle $\tilde{I}$ est une solution maximale (dans le sens de sa définition dans le chapitre précédent), autrement dit on ne peut pas la prolonger sur $I \setminus \tilde{I}$.
Par suite $\tilde{I}$ est nécessairement ouvert, sinon en appliquant le théorème de Cauchy-Lipschitz à son extrémité, on prolongerait la solution.
On remarque enfin que lorsque $\tilde{I} = I$ cette solution sera globale.

Le lemme suivant permet de prouver le "théorème des bouts" que nous énonçons juste après.

Lemme 4

Supposons que f soit continue, bornée et lipschitzienne par rapport à x dans $[\underline{t}-2\overline{T}, \underline{t}+2\overline{T}] \times \overline{B}(\underline{x}, 2R)$ pour tout $\overline{T} > 0$ et $R > 0$.
Alors il existe $T \in]0, \overline{T}]$ tel que pour tout $(t_0, x_0) \in [\underline{t}-\overline{T}, \underline{t}+\overline{T}] \times \overline{B}(\underline{x}, R)$, la solution maximale du problème de Cauchy (2.12) soit définie sur un intervalle contenant $[t_0 - T, t_0 + T]$.

Théorème 4 (DES BOUTS)

Sous les hypothèses du théorème de Cauchy Lipschitz (3), soit $x \in \mathscr{C}^1(\tilde{I}; J)$ une solution maximale de

$$x' = f(t, x).$$

On note b la borne supérieure supérieure de I et $\beta \leq b$ la borne supérieure de $\tilde{I}$. Alors ou bien $\beta = b$ ou bien x sort de tout compact de J, c'est à dire que pour tout compact $K \subset J$, il existe $\eta < \beta$ tel que

$$x(t) \in J \setminus K, \text{ pour } t \geq \eta \text{ avec } t \in \tilde{I}.$$

De même si $\inf \tilde{I} > \inf I$ alors x sort de tout compact lorsque t tend vers $\inf \tilde{I}$ par la droite.

2.6 Existence Globale

Lorsque $J = \mathbb{R}^m$ et f est globalement lipschitzienne, c'est à dire qu'il existe $L > 0$ tel que pour tous (t, x) et (t, y) dans $I \times J$,

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq \|x - y\|, \tag{2.15}$$

il n'y a pas de risque de sortir de son domaine de définition ni du domaine de validité de sa constante de Lipschitz.
En reprenant la preuve du théorème de Cauchy-Lipschitz (3) on peut donc construire, quels que soient a et b tels que $t_0 \in [a, b] \subset I$, une suite de solutions approchées (x^n) qui soit de Cauchy dans $\mathscr{C}([a, b]; \mathbb{R}^m)$. On en déduit alors le résultat global suivant.

Théorème 5 (EXISTENCE ET UNICITE GLOBALE)

On suppose $f \in \mathscr{C}(I \times \mathbb{R}^m; \mathbb{R}^m)$ et globalement lipschitzienne par rapport à x.
Alors, quel que soit $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{R}^m$, il existe un unique $x \in \mathscr{C}^1(I; \mathbb{R}^m)$ solution de (2.12).

Théorème 6 (EXIST. ET UNICITE GLOBALE (AFFINE))

Si $b \in \mathscr{C}(I;\mathbb{R}^m)$ et A est continue, définie sur I alors toutes les solutions maximales de

$$x'(t) = A(t)x + b(t),$$

sont globales.

Les résultats précédents restent également valable lorsque x est à valeurs dans un ouvert d'un espace de Banach de dimension finie ou infinie.
Par contre le résultat suivant n'est valable que lorsque x est à valeurs dans une espace de dimension finie (tout le programme de ce cours de toute façon est défini sur les espaces de dimension finie $\mathbb{R}^m$).

Théorème 7 (EXIST. ET UNICITE GLOBALE (DIM. FINIE))

Si f est uniformément bornée sur $I \times \mathbb{R}^m$, toutes les solutions maximales de $x' = f(t,x)$ sont globales.

(a) Thomas Hakon Grönwall ou (Gronwall) (1877-1932), mathématicien suédois, c'est lui qui démontra en 1919 le lemme (sous sa forme différentielle) qui porte désormais son nom. La démonstration de la forme intégrale de ce lemme sera montrée par Richard Bellman en 1943.

(b) Augustin Louis, baron Cauchy, (1789-1857), mathématicien français, dans son cours de Polytechnique, "Leçon de calcul différentiel et intégral", il étudie les résolutions des équations différentielles linéaire d'ordre un et s'intéresse aux équations au dérivées partielles.

(c) Rudolph Otto Sigismund Lipschitz (1832-1903), mathématicien allemand, son travail sur les équations différentielles vient préciser les résultats obtenus par Cauchy.

FIGURE 2.1 – Quelques mathématiciens célèbres liés à l'existence et l'unicité des EDO.

Chapitre 3

Systèmes différentiels linéaires

Dans ce chapitre nous allons nous intéresser aux systèmes d'équations différentielles, que l'on peut obtenir directement par la modélisation d'un problème à plusieurs fonctions inconnues, mais également lorsque l'on passe d'une EDO d'ordre n à un système de plusieurs EDO d'ordre 1 (voir la section (1.3)). Nous ne le faisons ici que pour le cas particulier des systèmes linéaires.

3.1 Théorie préliminaire

Soient un intervalle I un intervalle de $\mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $a_{i,j} : I \to \mathbb{R}$, $i, j = 1, ..., n$ et $f_i : I \to \mathbb{R}$ des fonctions continues.
L'objectif est de trouver des fonctions $x_1, ..., x_n : I \to \mathbb{R}$, n fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur I telles que

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_1' & = & a_{11}(t)x_1 + ... + a_{1n}(t)x_n + f_1(t), \\ & \vdots & \\ x_n' & = & a_{n1}(t)x_1 + ... + a_{nn}(t)x_n + f_n(t). \end{array} \right. \tag{3.1}$$

On peut écrire ce système sous la forme matricielle

$$X'(t) = A(t)X(t) + F(t), \tag{3.2}$$

où

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \quad A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix} \text{ et } F(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}.$$

En général il peut y avoir une infinité de solutions de cette équation.
Soient $t_0 \in I$ et $X^0 \in \mathbb{R}^n$ données, avec

$$X^0 = \begin{pmatrix} x_1^0(t) \\ \vdots \\ x_n^0(t) \end{pmatrix}. \tag{3.3}$$

Le but est de trouver X solution de l'équation (3.1) satisfaisant la condition initiale (3.3). Autrement dit, existe-t-il X fonction dérivable définie sur I à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ tel que

$$\left\{ \begin{array}{rcl} X'(t) & = & A(t)X(t) + F(t), \\ X(t_0) & = & X^0, \end{array} \right. \tag{3.4}$$

pour tout $t \in I$? Le théorème suivant est une adaptation du théorème (6) du chapitre précédent. Autrement dit, les solutions du problèmes de Cauchy (3.4) sont globales.

Théorème 1 (EXISTENCE ET UNICITE GLOBALE)

Si $A : I \to \mathscr{M}(\mathbb{R})$ et $F : I \to \mathbb{R}^n$ sont continues, autrement dit $t \to a_{ij}(t)$ est continue pour tous $i, j = 1, ..., n$ et $t \to f_i(t)$ est continue pour tout $i = 1, ..., n$, alors pour tout $t_0 \in I$ et pour tout $X^0 \in \mathbb{R}^n$, il existe une solution unique au problème de Cauchy (3.4).

Preuve :
Faite en cours.

3.2 Systèmes homogènes

Le système (3.1) est dit homogène si $F \equiv 0$, c'est à dire

$$X'(t) \;=\; A(t)X(t), \tag{3.5}$$

et nous avons l'existence et l'unicité des solutions de ce système dans le théorème suivant.

Théorème 2 (SOLUTIONS ESP.VECTORIEL)

L'ensemble H des solutions d'un système homogène est un espace vectoriel de dimension n.

Preuve :
Faite en cours.

Remarque
Il suffit alors d'avoir n solutions indépendantes de (3.5) qui formeront une base de H.

Rappel 3.1 *Soient n fonctions X^1, X^2, ..., $X^n : I \to \mathbb{R}^n$, elles sont dites indépendantes si pour tous $c_1, ..., c_n \in \mathbb{R}$ on a*

$$\sum_{i=1}^{n} c_i X^i(t) = 0, \text{ pour tout } t \in I \Rightarrow c_1 = c_2 = ... = c_n = 0.$$

Lemme 1 (WRONSKIEN)

Soient $X^1, .., X^n : I \to \mathbb{R}^n$ des solutions de (3.5), alors les trois propositions sont équivalentes :

1. Les $X^1, .., X^n$ sont indépendantes,
2. il existe $t_0 \in I$ tel que la matrice définie par
$$\left(X^1(t_0)|...|X^n(t_0)\right), \tag{3.6}$$
est inversible,
3. la matrice
$$\left(X^1(t)|...|X^n(t)\right), \tag{3.7}$$
est inversible pour tout $t \in I$.

Notation :
Le déterminant de la matrice (3.7) est appelé Wronskien

Définition 1 (MATRICE FONDAMENTALE)

Soient $X^1, .., X^n : I \to \mathbb{R}$ des solutions de (3.5). Si les n fonctions sont indépendantes, on dit qu'ils forment un ensemble fondamental de solution de (3.5). On notera alors
$$M(t) = \left(X^1(t)|...|X^n(t)\right), \tag{3.8}$$
la matrice $n \times n$ qu'on appellera matrice fondamentale du système (3.5).

Remarque

1. *On sait d'après le lemme précédent que $M(t)$ est inversible pour tout $t \in I$.*
2. *On sait également d'après le théorème (1) que les $X^1(t), ..., X^n(t)$ forment une base dans H qui est l'espace vectoriel des solutions de (3.5).*
3. *On observe aussi que*
$$M'(t) = A(t)M(t), \tag{3.9}$$
pour tout $t \in I$.
Donc une matrice $M(t)$ est fondamentale si et seulement si $M' = AM$ et $M(t)$ est inversible au moins pour un $t \in I$ (car alors elle est inversible pour tout $t \in I$).

On a alors le théorème suivant

Théorème 3 (SOLUTIONS SYST. HOMOGENE)

Soient $X^1, .., X^n$ un ensemble fondamental de solutions de (3.5). Alors toute solution X de (3.5) est de la forme

$$X(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i X^i(t), \tag{3.10}$$

avec $c_1, ..., c_n \in \mathbb{R}$.

Remarque
Si on parvient à trouver n solutions indépendantes de (3.5) alors on connait toutes les solutions de (3.5). Mais attention, ça ne marche que parce que (3.5) est linéaire et homogène !

3.3 Systèmes non homogènes

Revenons au système non homogène (3.2) avec F non identiquement nulle.

Théorème 4 (SOLUTIONS SYST.NON HOMOGENE)

Soient $X^1, .., X^n$ un ensemble fondamental de solutions du problème homogène (3.5) et X_p une solution particulière de (3.2). Alors toute solution X de (3.2) est de la forme

$$X(t) = X_p + \sum_{i=1}^{n} c_i X^i(t), \tag{3.11}$$

avec $c_1, ..., c_n \in \mathbb{R}$.

Remarque
Comment trouver une solution particulière X_p alors ? Comme pour les chapitre 1 par la méthode de variation de la constante.
On va chercher un X_p sous la forme

$$X_p(t) = \sum_{i=1}^{n} X^i(t)\gamma_i(t),$$

où $\gamma_i : I \to \mathbb{R}$ est à trouver.
On obtient

$$X_p' = M\gamma' A + X_p,$$

d'une part, et d'autre part on aimerait que X_p satisfasse le système non-homogène

$$X_p' = MAX_p + F,$$

En identifiant, cela revient à chercher γ solution de

$$M\gamma' = F,$$

et comme M est inversible, on doit donc trouver γ telle que

$$\gamma' = M^{-1}F$$

Par conséquent, un choix possible pour X_p sera

$$X_p = M\gamma = M\int_{t_0}^{t} M^{-1}(s)F(s)ds, \tag{3.12}$$

pour un $t_0 \in I$ fixé.
On déduit alors du théorème (4) que les solutions du problème non-homogène sont de la forme

$$X = X_p + X_F = M(t)\int_{t_0}^{t} M^{-1}(s)F(s)ds + M(t)C, \tag{3.13}$$

avec $C \in \mathbb{R}^n$.
Si en plus, on fixe $t_0 \in I$ et $X^0 \in \mathbb{R}^n$ et on cherche la solution du problème de Cauchy, le vecteur $C \in \mathbb{R}^n$ est donné par

$$C = M^{-1}(t_0)X^0.$$

Alors l'unique solution du problème est donnée par'

$$X(t) = M(t)M^{-1}(t_0)X^0 + M(t)\int_{t_0}^{t} M^{-1}(s)F(s)ds. \tag{3.14}$$

Remarque
Toute la difficulté consistera donc à trouver une matrice fondamentale $M(t)$.
Une telle matrice n'est pas unique. En effet, si $M(t)$ est une matrice fondamentale, alors pour toute matrice $E \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ constante, $M(t).E$ est encore une matrice fondamentale.

3.4 Systèmes linéaires à coefficients constants

Nous allons dans cette section considérer un cas particulier de la section précédente. Nous allons étudier le problème (3.2) avec A constante.

3.4.1 Exponentielle de A

Le but est de se concentrer sur la recherche d'une matrice fondamentale $M(t) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ de (3.5), autrement dit, telle que $M(t)$ soit inversible au moins pour un $t \in I$ et telle que $M'(t) = AM(t)$ pour tout $t \in I$.
Nous allons nous servir dans la suite de la notion d'exponentielle de matrice que nous exposons ici.

Rappelons que si $n = 1$, alors $\mathscr{M}_1(\mathbb{R})$ peut s'identifier à $\mathbb{R}$ et $A \in \mathbb{R}$. Donc on cherche $M : I \to \mathbb{R}$ telle que $M' = AM$. Et une matrice inversible sous la forme $M(t) = e^{At}$ est une solution de cette équation.
Question : peut-on étendre ce résultat lorsque $n \geq 2$?
On rappelle également qu'une définition de l'exponentielle e^t où $t \in \mathbb{R}$ est

$$e^t = \sum_{n \geq 0} \frac{t^n}{n!}. \tag{3.15}$$

Nous allons voir que cela marche également pour les exponentielles de matrice.

Définition 2 (EXPONENTIELLE DE MATRICE)

Pour toute matrice carrée $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ on définit la matrice carée $e^A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ par

$$e^A = I + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \ldots = \sum_{n \geq 0} \frac{A^n}{n!}. \tag{3.16}$$

Remarque
Cette série est absolument convergente en $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ muni de la norme subordonnée

$$|||A||| = \sup_{X \in \mathbb{R}^n, X \neq 0} \frac{\|AX\|}{\|X\|}, \tag{3.17}$$

où $\|.\|$ est une norme vectorielle quelconque sur $\mathbb{R}^n$.

Théorème 5 (SOLUTION FONDAMENTALE)

La matrice $M(t) = e^{tA} = \sum_{n \geq 0} \frac{t^n}{n!} A^n$ est une solution fondamentale de (3.5). Elle est donc inversible et satisfait $M'(t) = A(t)M(t)$.

Rappel 3.2
Rappelons la formule suivante : si E et F sont des éléments de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, et si E et F commutent (c'est à dire $E.F = F.E$) alors

$$e^{E+F} = e^E.e^F = e^F.e^E. \tag{3.18}$$

On en déduit alors les deux résultats suivants :

1. $e^{(\lambda_1+\lambda_2)A} = e^{\lambda_1 A}.e^{\lambda_2 A}$ *pour tous $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ et pour tout $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$,*
2. $(e^A)^{-1} = e^{-A}$ *pour tout $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.*

On peut alors donner le résultat suivant.

Théorème 6 (SOLUTION SYST. NON HOMOGENE)

Si A est constante alors la solution de (3.2) est donnée par

$$X(t) = e^{A(t-t_0)}X^0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)}F(s)ds. \tag{3.19}$$

La question qui se pose alors est la suivante : comment trouver e^{At} sans nécessairement passer par un calcul éventuellement fastidieux d'une série.
L'idée est la suivante :
nous allons chercher $X(t) \in \mathbb{R}^n$ une solution de l'équation (3.5)

$$X' = AX,$$

sous la forme

$$X(t) = e^{\lambda t}V,$$

avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et $V \in \mathbb{R}^n - \{0\}$. Lorsqu'on remplace cette valeur dans (3.5) on obtient

$$AV = \lambda V.$$

Donc, $X(t) = e^{\lambda t}V$ sera solution si $\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur propre de A, de vecteur propre correspondant $V \in \mathbb{R}^n - \{0\}$. Il est à noter que le résultat marche également sur $\mathbb{C}$.

3.4.2 Dimension 2

Avant de généraliser à la dimension n quelconque, nous allons commencer par les solutions des systèmes de deux équations et les portraits de phase associés, c'est à dire l'allure des courbes décrites par ces solutions dans le plan $\mathbb{R}^2$. Trois cas peuvent se distinguer.

a. Deux valeurs propres réelles distinctes

Soient λ et μ deux valeurs propres réelles de A, avec A diagonalisable.
Si P est une matrice de passage composée d'une base de vecteurs propres, on a

$$P^{-1}e^{tA}P = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}, \tag{3.20}$$

et les solutions de l'EDO homogène sont de la forme

$$X(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}P_1 + c_2 e^{\lambda_2 t}P_2, \tag{3.21}$$

où c_1 et c_2 sont des constantes de $\mathbb{R}$ trouvées à partir des conditions initiales.

b. Une valeur propre double

Deux sous-cas sont alors possibles.

i. Si A est diagonalisable, on a P une matrice de passage composée d'une base de vecteurs propres, et

$$P^{-1}e^{tA}P = \begin{pmatrix} e^{\lambda_0 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_0 t} \end{pmatrix}, \tag{3.22}$$

et les solutions de l'EDO homogène sont de la forme

$$X(t) = c_1 e^{\lambda_0 t} P_1 + c_2 e^{\lambda_0 t} P_2, \tag{3.23}$$

où c_1 et c_2 sont des constantes de $\mathbb{R}$ trouvées à partir des conditions initiales.

ii. La matrice A admet une valeur propre réelle double λ_0, mais un seul vecteur propre lui est associé. Si P est une matrice de passage à une base de Jordan, alors

$$P^{-1}e^{tA}P = \begin{pmatrix} e^{\lambda_0 t} & te^{\lambda_0 t} \\ 0 & e^{\lambda_0 t} \end{pmatrix}. \tag{3.24}$$

Si on note P_1 un vecteur associé à la valeur propre λ_0 alors on peut trouver un ensemble fondamental X^1, X^2 tels que

$$X^1 = e^{\lambda_0 t} P_1, \quad X_2 = e^{\lambda_0 t}\left(tP_1 + K\right), \tag{3.25}$$

où K est un vecteur de $\mathbb{R}^n$ à identifier.
les solutions de l'EDO homogène, sont alors données par $X = c_1 X_1(t) + c_2 X_2(t)$, où c_1 et c_2 sont des constantes de $\mathbb{R}$ trouvées à partir des conditions initiales.

c. Deux valeurs propres conjuguées

Les valeurs propres λ_1 et λ_2 de A sont complexes conjuguées, *i.e.* $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$, où $\lambda_1 = \alpha + \beta i$. Alors A est semblable à

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}, \tag{3.26}$$

avec $\alpha = Re(\lambda)$ et $\beta = Im(\lambda)$ et

$$P^{-1}e^{tA}P = e^{\alpha t}\begin{pmatrix} \cos(\beta t) & t\sin(\beta t) \\ -\sin(\beta t) & \cos(\beta t) \end{pmatrix}. \tag{3.27}$$

Si on note P_1 et $\overline{P_1}$ deux vecteurs propres associées aux valeurs propres, on peut alors écrire un ensemble fondamental de deux façons.

i. $X_1(t) = e^{\lambda_1 t}$, et son conjugué. Les solutions de l'EDO homogène sont de la forme $X = c_1 X_1 + c_2 \overline{X_1}$.

ii. Si on note $B_1 = Re(P_1)$ et $B_2 = Im(P_1)$ on a

$$X_1 = \left(B_1\cos(\beta t) - B_2\sin(\beta t)\right)e^{\alpha t}, X_2 = \left(B_2\cos(\beta t) - B_1\sin(\beta t)\right)e^{\alpha t}. \tag{3.28}$$

Et les solutions sont données par une combinaison linéaire de X_1 et X_2.

3.4.3 Dimension n : cas où A est diagonalisable

On pose $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 3 (MATRICE DIAGONALISABLE)

$A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable dans $\mathbb{K}$ s'il existe $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{K}$ et il existe $P \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ inversible telle que

$$A = PDP^{-1},$$

avec $D = diag(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

On obtient alors le résultat suivant.

Proposition 1 (EXPONENTIELLE ET VAL. PROPRES)

Si A est diagonalisable, alors, en utilisant les notations qui précèdent, on a

$$e^{At} = Pe^{Dt}P^{-1} \tag{3.29}$$

avec

$$e^{Dt} = diag\left(e^{\lambda_1 t}, ..., e^{\lambda_n t}\right) \tag{3.30}$$

et comme les P_i sont linéairement indépendants on a une base fondamentale

$$M(t) = \left(e^{lambda_1 t}P1|...|e^{\lambda_n t}P_n\right). \tag{3.31}$$

Remarque :
On remarque que si A est diagonalisable, $M(t)$ qui est la matrice fondamentale peut s'écrire

$$M(t) = Pe^{Dt},$$

mais comme $e^{At}P = Pe^{Dt}$, alors

$$e^{At} = M(t).P^{-1}$$

Remarque :
On peut avoir des valeurs propres multiples même si A est diagonalisable. En fait, A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ si toutes les valeurs propres sont réelles et s'il existe une base réelle de vecteurs propres. C'est le cas par exemple quand la matrice A est symétrique, ou si les valeurs propres de A sont distinctes, chacune de multiplicité 1.

3.4.4 Dimension n : cas A non diagonalisable

Rappel 3.3 *MULTIPLICITE DE VALEURS PROPRES*
On rappelle que $\lambda \in \mathbb{C}$ est vecteur propre de A si et seulement si λ est racine complexe du

polynôme caractéristique de A,

$$P_A(\lambda) = \det(\lambda I - A).$$

En général $P_A(\lambda)$ *s'écrit sous la forme*

$$P_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{d_1}(\lambda - \lambda_2)^{d_2}...(\lambda - \lambda_k)^{d_k}, \tag{3.32}$$

avec $\lambda_1, ..., \lambda_k \in \mathbb{C}$ *les valeurs propres de* A*,* $d_1, ..., d_k \in \mathbb{N}^*$*,* $k \in N^*$*, et* $d_1 + ... + d_k = n$*. Alors la multiplicité de* λ_j *est* d_j*,* $j = 1, ..., k$*. On appelle* d_j *s'appelle multiplicité algébrique.*
On voit de façon assez claire, que si $k = n$ *et* $d_1 = ... = d_n = 1$ *et* $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$ *alors* A *est diagonalisable sur* $\mathbb{R}$*. Il n'est cependant pas nécessaire que les valeurs propres soient simples pour avoir* A *diagonalisable.*

Exemple
$A = Id_n$*,* $P_{I_n}(\lambda) = (\lambda - 1)^n$*, une seule valeur propre de multiplicité 1 et pourtant* I_n *est diagonalisable sur* $\mathbb{R}$*.*

Remarque
Si $\mu = \alpha + \beta i \in \mathbb{C}$ *avec* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$*,* $\beta \neq 0$ *est valeur propre de* A *de multiplicité* m *alors son complexe conjugué l'est aussi (*$\overline{\mu} = \alpha - \beta i$*) est valeur propre de* A *de multiplicité* m*.*
En fait pour toute valeur propre $\lambda_j \in \mathbb{C}$ *de* A *on note* $m_j \in \mathbb{N}^*$ *la dimension de vecteur propre de* A *associée à* λ_j*. Le nombre* m_j *est appelé multiplicité géométrique. On a* $1 \leq m_j \leq d_j$*,* $j = 1, ..., k$ *alors la matrice est diagonalisable. S'il existe* j *tel que* $\beta_j < \alpha_j$ *alors la matrice* A *n'est pas diagonalisable.*

Question : comment procéder quand A n'est pas diagonalisable ?
La méthode consiste à trigonaliser A de manière convenable. D'après le cours d'algèbre linéaire, on sait qu'il existe $P \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ inversible et $S \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ triangulaire supérieure telle que

$$A = PSP^{-1}, \tag{3.33}$$

avec S qui s'écrit par blocs de la manière suivante

$$S = \begin{pmatrix} S_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & S_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & S_k \end{pmatrix} \tag{3.34}$$

avec les blocs $S_j \in \mathscr{M}_{d_j}(\mathbb{R})$ qui sont des matrices carrées de taille d_j de la forme

$$S_j = \begin{pmatrix} \lambda_j & s^j_{12} & \cdots & s^j_{1d_j} \\ 0 & \lambda_j & \cdots & s^j_{2d_j} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_j \end{pmatrix} \tag{3.35}$$

S_j est triangulaire supérieure avec les λ_j sur la diagonale.

Théorème 7 (EXPONENTIELLE-TRIDIAGONALE)

Si on peut écrire A sous la forme tridiagonale grâce à la formule (3.33) précédente avec P inversible et T donnée par (3.34) et (3.35) alors e^{At} s'écrit par blocs de la façon suivante

$$e^{At} = P \begin{pmatrix} e^{S_1}t & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{S_2 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{S_k t} \end{pmatrix} P^{-1} \tag{3.36}$$

avec $e^{S_i t} \in \mathscr{M}_{\alpha_j}(\mathbb{C})$ donnée par

$$e^{S_i t} = e^{\lambda_j t}\left[I + tM_j + \frac{1}{2}t^2 M_j^2 + ... + \frac{1}{(\alpha_j - 1)} t^{\alpha_j - 1} M_j^{\alpha_j - 1}\right] \tag{3.37}$$

où $S_j = \lambda_j I + M_j$

Théorème 8 (SYSTEME FONDAMENTAL)

Un système fondamental de solutions de

$$X' = AX \tag{3.38}$$

qui est de la forme

$$X^{1,1}, ..., X^{1,\alpha_1}, X^{2,1}, ..., X^{2,\alpha_2}, ..., X^{k,1}, ..., X^{k,\alpha_k},$$

avec

$$X^{j,1} = e^{\lambda_j t} Q^{j,1}, X^{j,2} = e^{\lambda_j t} Q^{j,2}, \vdots X^{j,\alpha_j} = e^{\lambda_j t} Q^{j,\alpha_j},$$

et les $Q^{j,l}$ sont des vecteurs polynômes de degré inférieur à $l-1$, $l = 1, ..., \alpha_j$

Chapitre 4

Equations autonomes-Etude qualitative

Dans ce chapitre, nous allons nous intéresser aux EDO linéaires ou non linéaires autonomes données dans la définition (3) mais seulement à l'ordre 1 étant donné que nous pouvons nous ramener à cet ordre, comme nous l'avons vu dans le chapitre 1. Autrement dit, nous nous intéressons aux équations de la forme

$$x' = f(x), \tag{4.1}$$

où f est une fonction définie sur un ouvert J de $\mathbb{R}^m$ à valeurs dans $\mathbb{R}^m$. Afin de satisfaire le problème de Cauchy-Lipschitz (3), nous supposerons dans tout ce chapitre que f est localement lipschitzienne.

Même si le problème a l'air simple pour les EDO autonomes, il y a très peu de cas où nous savons trouver des solutions explicites. Il est donc intéressant de faire une analyse qualitative (par opposition à une étude quantitative) des solutions pour nous donner une idée du comportement de ces dernières autour de solutions "spéciales" que l'on précisera plus bas.

Avant cela nous allons voir dans un premier temps, comment on construit graphiquement des solutions sans en connaître leur formulation explicite. Puis nous ferons une étude qualitative des solutions de l'équation autonome, en dimension 1 dans un premier temps, pour les cas linéaires, puis non-linéaires. Nous le ferons également en dimension 2 (qui est peut être intéressant graphiquement) et nous généraliserons à la dimension n.

4.1 Dimension 1

4.1.1 Préambule : construction graphique des solutions

Avant de commencer à étudier qualitativement les solutions, rappelons comment il est possible d'interpréter graphiquement les solutions d'EDO du premier ordre sous forme normale

$$x' = f(t, x),$$

où $t \in I$ et x est à valeurs dans $\mathbb{R}$.

En chaque point (t_0, x_0) la valeur $f(t_0, x_0)$ donne la pente des solutions qui passent par ce point. Il est donc possible de trouver l'allure de la courbe représentative de la solution de l'EDO passant par (t_0, x_0) grâce aux tangentes en chaque point de la courbe.

Exemple
Trouver l'allure des courbes solutions de l'EDO $x' = t$, passant par un point (t_0, x_0) que vous choisirez.

Définition 1 (ISOCLINES)

On appelle isocline K de l'équation $x' = f(t,x)$, l'ensemble des points $(t,x) \in \mathbb{R}^2$ tels que $f(t,x) = K$.

Exemple

1. *Tracer quelques isoclines correspondant à l'équation $x' = t$. En déduire l'allure des trajectoires solutions de l'exemple précédent.*
2. *Tracer quelques isoclines correspondant à l'équation $x' = x^2 - t$. En déduire l'allure des trajectoires représentant les solutions de cette équation.*
3. *Même question avec l'équation $x' = x(1-x)$.*

Remarque
Le dernier exemple représente un cas où l'équation différentielle est autonome. On voit bien qu'alors les isoclines présentent des particularités spécifiques, de même pour l'allure des trajectoires. C'est ce que nous allons voir dans la section suivante.

4.1.2 Equations autonomes en dimension 1

Dans cette section nous ne nous intéresserons qu'aux équations autonomes dont les solutions sont définies sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Nous avons dans la section (1.4.2) que les solutions des EDO autonomes sont monotones. Cette propriété importante permettra de déduire plus facilement le comportement des solutions.

Théorème 1 (INVARIANCE PAR TRANSLATION)

Si $t \mapsto x(t)$ est solution de l'EDO autonome

$$x' = f(x), \tag{4.2}$$

sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ alors pour tout $c \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto y(t) := x(t+c)$ est aussi solution.

Remarque
Grâce à cette invariance par translation, on peut choisir de représenter le comportement des solutions de l'EDO autonome sur un axe vertical.

Définition 2 (PORTRAIT DE PHASE)

Cette représentation sur un axe verticale est appelée portrait de phase de $x' = f(x)$ sur $I \subset \mathbb{R}$.

Remarque
Attention, on ne le fait que lorsque f est lipschitzienne, sinon on pas existence et unicité des solutions.

Exemple
Tracer le portrait de phase de l'équation suivante

$$x' = x(1 - x).$$

On remarque que le portrait de phase s'articule autour de points spéciaux : des poins pour lesquels la fonction f s'annule. Or, dans l'EDO autonome $x' = f(x)$, si f s'annule pour une fonction x^*, sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, cela signifie que $x^*(t) = Constante$ pour tout $t \in I$. Autrement dit, la fonction f n'a pas d'action sur x^* dans le temps. On dit que la solution est stationnaire.

Définition 3 (SOLUTION STATIONNAIRE)

On appelle solution stationnaire (ou également point d'équilibre ou point critique), une solution constante x^* telle que $f(x^*) = 0$.

Tracer le portrait de phase consiste donc à :

a. Tracer l'axe des ordonnées
b. Reporter les points où f s'annule (points d'équilibre)
c. Entre deux points d'équilibre, f ne change pas de signe. Reporter alors ce signe sous forme de flèches.

Remarque

a. Sous les hypothèses de Cauchy-Lipschitz si pour un t_0 la solution $x(t_0)$ est située au-dessus d'un point d'équilibre x^*, elle le sera pour tout $t \in I$ où elle est définie.
b. Même chose avec au-dessous.
c. Comme les solutions sont monotones, on ne peut pas observer d'oscillations.

4.1.3 Stabilité des équilibres

Une fois les équilibres des solutions trouvés, il est intéressant de savoir s'ils sont stables ou non dans le sens où, si on perturbe légèrement un équilibre, est-ce que la solution perturbée reviendra vers l'équilibre (stable) ou est-ce qu'il s'en éloignera (instable) ?

Définition 4 (EQUILIBRES STABLES, INSTABLES)

Soit x^* un équilibre d'une EDO autonome.

1. S'il existe au-moins une perturbation de x^* qui est amplifiée par le système on dit que l'équilibre est instable
2. Si toutes les perturbations tendent vers 0 quand t tends vers l'infini, on dit que l'équilibre est asymptotiquement stable
3. Si les perturbations ne sont ni amplifiées, ni amorties, l'équilibre est neutralement stable.

Remarque
Ici, "légèrement perturbé" signifie que l'on ne s'intéresse qu'à des petites perturbations, on parle alors de stabilité locale (par opposition à stabilité globale) que l'on verra plus tard.

Définition 5 (CLASSIFICATION DES EQUILIBRES)

1. Lorsqu'un équilibre est stable on dit que c'est un puits ou un point attractif
2. Lorsqu'un équilibre est instable on dit que c'est une source ou un point répulsif
3. Lorsqu'un équilibre est attractif pour une perturbation inférieure à cet équilibre et répulsif pour une perturbation supérieure, on dit que c'est un shunt positif
4. Lorsqu'un équilibre est attractif pour une perturbation supérieure à cet équilibre et répulsif pour une perturbation inférieure, on dit que c'est un shunt négatif.

Définition 6 (QUALITATIVEMENT EQUIVALENT)

On dit que deux EDO autonomes sont qualitativement équivalentes si et seulement si elles ont le même nombre d'équilibres et que ceux-ci sont de même nature.

4.1.4 Etude analytique de la stabilité

1. **Cas linéaire** $x' = \lambda x$
   Le seul équilibre de cette EDO est $x^* \equiv 0$. On rappelle également que si une solution s'annule pour un point $t_0 \in I \subset \mathbb{R}$ alors cette solution est partout identiquement nulle.
   Considérons un problème de Cauchy d'équation différentielle $x' = \lambda x$ où $\lambda \in \mathbb{R}$ ayant pour condition initiale $x(0) \neq 0$. Les solutions sont de la forme

$$x(t) = x(0)e^{\lambda t}.$$

   Trois cas se présentent alors :
   (a) Si $\lambda > 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} |x(t)| = +\infty$. L'équilibre $x^* \equiv 0$ est appelé source : c'est un équilibre instable,

(b) Si $\lambda < 0$, $\lim_{t\to+\infty} |x(t)| = 0$. L'équilibre $x^* \equiv 0$ est appelé puits : c'est un équilibre asymptotiquement stable,

(c) Si $\lambda = 0$, $x(t) \equiv x(0)$. Tous les points sont des équilibres neutralement stables.

2. **Cas non-linéaire** $x' = f(x)$
Considérons l'équation différentielle non-linéaire $x' = f(x)$ où f est une application non linéaire qui vérifie les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz. On suppose que cette équation possède au-moins un équilibre noté x^*. Autrement dit, la solution constante x^* vérifie l'équation $f(x^*) = 0$. L'objectif de cette section est de nous ramener au cas précédent en linéarisant autour de x^*.
Méthode :
-on pose $x(t) = x^* + x_p(t)$ pour tout $t \in I$ où x_p est une perturbation supposée petite (dans le voisinage de 0),
-on injecte ce $x(t)$ dans l'équation différentielle $x' = f(x)$ et on obtient :

$$x' = f(x^* + x_p). \tag{4.3}$$

Le problème provient de la non-linéarité de l'application f. Nous allons alors linéariser f autour de x^* ou pour être plus précis entre x^* et x_p. En supposant que f soit dérivable dans un voisinage de x^*, et en faisant un développement de Taylor à l'ordre 1 on obtient l'approximation suivante :

$$\frac{f(x^* + x_p) - f(x^*)}{x_p} \simeq f'(x^*). \tag{4.4}$$

Rappelons que nous sommes dans un voisinage de x^*, c'est à dire que notre perturbation x_p est “suffisamment petite”.
-Nous obtenons alors, à partir de (4.3) et (4.4) l'équation linéaire, qui est en fait une approximation mais que par abus nous poserons comme une équation,

$$x_p' = f'(x^*)x_p. \tag{4.5}$$

On se ramène ainsi au cas linéaire de la section précédente. Les solutions de l'équation (4.5) sont données par

$$x_p(t) = ce^{f'(x^*)t}, \tag{4.6}$$

où c est une constante donnée par la condition initiale, et l'on conclut comme dans la section précédente :

(a) Si $f'(x^*) > 0$, nous avons $\lim_{t\to+\infty} |x_p(t)| = +\infty$, et alors x^* sera instable.

(b) Si $f'(x^*) < 0$, nous avons $\lim_{t\to+\infty} |x_p(t)| = 0$, et alors x^* sera localement asymptotiquement stable.

(c) Si $f'(x^*) = 0$, l'équation linéarisée ne permet pas de conclure tout de suite.

Pour ce dernier cas, il faut