9 janvier 2023
La science pour la santé

Etude qualitative de systèmes de 2 équations différentielles autonomes d'ordre 1.

↳ ne dépend pas explicitement de t

1. Introduction

Dans ce cours, nous étudierons les systèmes d'équations différentielles ordinaires (edo) de la forme

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t), y(t)) \\ y'(t) = g(x(t), y(t)) \end{cases} \qquad t \in I \subset \mathbb{R}$$

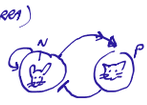
de façon plus "claire" on écrit

$$\begin{cases} x' = f(x,y) \\ y' = g(x,y) \end{cases}$$

avec pour conditions initiales $x(t_0) = x_0$, $y(t_0) = y_0$, $t_0 \in I$, $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$

Exemples : 1. Equations de proie et prédateurs (LOTKA-VOLTERRA)

$$\begin{cases} N'(t) = a.N(t) - bN(t)P(t) = f(N(t),P(t)) \\ P'(t) = -cP(t) + dN(t)P(t) = g(N(t),P(t)) \end{cases}$$

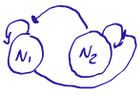


$N(t)$ = population des proies au temps t

$P(t)$ = " " prédateurs au temps t

2. Equations de compétition

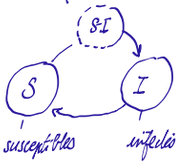
$$\begin{cases} N_1'(t) = r_1 N_1(t)\left(1 - \dfrac{N_1(t) + a_2 N_2(t)}{K_1}\right) \\ N_2'(t) = r_2 N_2(t)\left(1 - \dfrac{N_2(t) + a_1 N_1(t)}{K_2}\right) \end{cases}$$



si $N_2 = 0$: $N_1' = r_1 N_1\left(1 - \dfrac{N_1}{K_1}\right)$ équation différentielle logistique (VERHULST)

taux de croissance maximale — capacité de charge

3. Epidémiologie



$$S'(t) = -aS(t)I(t) + bI(t)$$
$$I'(t) = +aS(t)I(t) - bI(t)$$

Remarque $S'(t) + I'(t) = 0$ — $S(t)$: population des susceptibles au temps t

$(S(t) + I(t))' = 0$ — $I(t)$: " des infectés au temps t

$\Rightarrow \underbrace{S(t) + I(t)}_{\text{population totale est constante}} = P'$

Question : comment étudier ces équations ?

En général on ne peut pas les résoudre "à la main" c'est à dire qu'on ne peut pas trouver de solution explicite. (on ne peut pas faire d'étude QUANTITATIVE)

Il faut alors attaquer le problème sous un autre angle : l'étude des équilibres et de leur stabilité (ETUDE QUALITATIVE). C'est ce que nous allons faire dans ce cours.

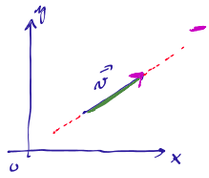
Pour ça, nous allons devoir définir quelques nouvelles notions de mathématiques

2. Vecteurs et matrices en dimension 2

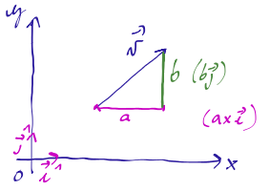
a. Vecteurs en dimension 2 (dans $\mathbb{R}^2$)

$\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$
(x, y)

Un vecteur de $\mathbb{R}^2$ est défini par :
- sa longueur $\|\vec{v}\|$ (norme)
- sa direction (support, droite sur laquelle le vecteur se trouve)
- son sens

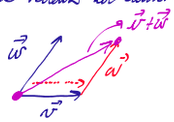


Le vecteur peut également être défini par ses {composantes / coordonnées} $\vec{v}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$



$\vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j}$

La somme de 2 vecteurs est aussi un vecteur et se construit de la façon suivante :



<u>Propriété :</u> Deux vecteurs sont linéairement indépendants si et seulement si $k_1\vec{v_1}+k_2\vec{v_2}=0$ alors $k_1=k_2=0$ $\quad \vec{v_1} \nearrow \vec{v_2}$

Autrement dit si $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$ ne sont pas linéairement indépendants (on dit alors qu'ils sont colinéaires on écrit :

$k_1\vec{v_1}+k_2\vec{v_2}=0$ avec k_1 et $k_2 \neq 0$

$\Leftrightarrow k_1\vec{v_1}=-k_2\vec{v_2}$

$\Leftrightarrow \vec{v_1}=\frac{-k_2}{k_1}\vec{v_2} = k\vec{v_2}$ en posant $k=\frac{-k_2}{k_1}$

b. <u>Matrices 2x2</u>

Définition : Une matrice réelle (à coefficients réels) est un tableau constitué de 2 lignes et 2 colonnes

ex : $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ → 2 lignes

↑ ↑ 2 colonnes

c. <u>Opérations entre matrice et vecteur</u>

Notons $\vec{v}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ et $M=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$M.\vec{v}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix} ax_1+bx_2 \\ cx_1+dx_2 \end{pmatrix}}_{\text{vecteur}}$$

mais si $\vec{v}^T=(x_1\ x_2)$ mais $\vec{v}^T.M=(x_1\ x_2)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=(ax_1+cx_2\quad bx_1+dx_2)$ une matrice

Donc attention : $M\vec{v} \neq \vec{v}^T M$ ($\vec{v}^T M$ n'est pas possible)

d. <u>Trace et déterminant d'une matrice</u> : soit $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$\text{trace}(A) = \text{trace}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a+d$ somme des éléments de la première diagonale

$\det(A) = \det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a\times d - cb$

<u>Exercice</u> : Calculer la trace et le déterminant de :

$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ $\quad B=\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ $\quad C=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$

e. Comment résoudre un système de 2 équations à 2 inconnues avec les vecteurs et les matrices

On considère le système suivant :

$$(S)\begin{cases} ax_1+bx_2=k_1 & (1) \\ cx_1+dx_2=k_2 & (2) \end{cases}$$

objectif : trouver x_1 et x_2 (a, b, c, d, k_1 et k_2 : connus)

Méthode du <u>PIVOT DE GAUSS</u> :

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} (1) \\ (2)' = -\frac{a}{c}(2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ax_1+bx_2=k_1 & (1) \\ -\frac{a}{c}.cx_1-\frac{a}{c}.dx_2=-\frac{a}{c}.k_2 & (2)' \end{cases} \quad \text{si } c\neq 0$$

$(1)+(2)' = \quad bx_2-\frac{a}{c}.dx_2=k_1-\frac{a}{c}k_2$

$\Leftrightarrow \frac{(bc-ad)}{c}x_2 = \frac{c.k_1-ak_2}{c}$

$\Leftrightarrow (bc-ad)x_2 = ck_1-ak_2$

$\Leftrightarrow \boxed{x_2 = \frac{ck_1-ak_2}{bc-ad}}$

On remplace x_2 dans (1) et on trouve :

$(1)' \quad ax_1+b\frac{ck_1-ak_2}{bc-ad}=k_1$

$(1) \quad ax_1 = k_1-\frac{ck_1-ak_2}{bc-ad}b.$

$$= \frac{(bc-ad)k_1 - b(ck_1 - ak_2)}{bc-ad}$$

$$= \frac{\cancel{bck_1} - adk_1 - \cancel{bck_1} + abk_2}{bc-ad}$$

$$ax_1 = \frac{-adk_1 + abk_2}{bc-ad}$$

$$\cancel{a}x_1 = \frac{\cancel{a}}{bc-ad} \cdot (bk_2 - dk_1)$$

$$\boxed{x_1 = \frac{bk_2 - dk_1}{bc-ad}}$$

ex: $\begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

Conclusion la solution est $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{bk_2-dk_1}{bc-ad}\\ \frac{ck_1-ak_2}{bc-ad}\end{pmatrix} = \frac{1}{bc-ad}\begin{pmatrix}bk_2-dk_1\\ ck_1-ak_2\end{pmatrix}$

Remarque : calculer $\begin{pmatrix}-d & b\\ c & -a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k_1\\k_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-d & b\\ c & -a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k_1\\k_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-dk_1+bk_2\\ ck_1-ak_2\end{pmatrix}$

Calculer $\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}ax_1+bx_2\\ cx_1+dx_2\end{pmatrix}$

Calculer $\det\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix} = \boxed{ad-bc}$

Remarque : $\boxed{S\begin{cases}ax_1+bx_2 = k_1\\ cx_1+dx_2 = k_2\end{cases}}$ s'écrit alors $\underbrace{\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}}_{A}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}k_1\\k_2\end{pmatrix}$

Donc si on pose $A = \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$ et $\vec{K} = \begin{pmatrix}k_1\\k_2\end{pmatrix}$

(S) s'écrit $\boxed{A.\vec{v} = \vec{K}}$

on x par $\frac{-1}{-1}$

et la solution s'écrit : $x_1 = \frac{1}{bc-ad}(bk_2 - dk_1) = \frac{1}{ad-bc}(dk_1 - bk_2)$

$x_2 = \frac{1}{bc-ad}(ck_1 - ak_2) = \frac{1}{ad-bc}(ak_2 - ck_1)$

$$= \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix}dk_1 - bk_2\\ -ck_1 + ak_2\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix}d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k_1\\k_2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \vec{v} = \frac{1}{\det A} \cdot A' \cdot \begin{pmatrix}k_1\\k_2\end{pmatrix}$$

où $A' = \begin{pmatrix}d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}$

17 janvier : Conclusion quand on veut résoudre

$\begin{cases}ax_1+bx_2 = k_1\\ cx_1+dx_2 = k_2\end{cases}$ on l'écrit $\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}k_1\\k_2\end{pmatrix}$

et si $\det\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix} = ad-bc \neq 0$ on a : $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \frac{1}{\det\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix}d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}}_{\text{on l'obtient}}\begin{pmatrix}k_1\\k_2\end{pmatrix}$

ce qui revient à écrire $A\vec{v} = \vec{k}$ donne $\vec{v} = \frac{1}{\det A} \cdot A'$

$\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}$

Définition : La matrice A' s'appelle matrice adjointe

et on note A^{-1} la matrice inverse de A telle que

$A^{-1}A = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ avec $\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A'}$

en 1D :
$ax = b$
$\frac{1}{a} \cdot ax = \frac{b}{a}$
$1 \cdot x = \frac{b}{a}$
$x = \frac{b}{a}$

Donc, résoudre $A\vec{v} = \vec{k}$ on multiplie à gauche par A^{-1} on a :

$A^{-1}A\vec{v} = A^{-1}\vec{k}$

$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\vec{v} = A^{-1}\vec{k}$ on note $Id_2 = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ matrice identité

$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\vec{v} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \vec{v}$

$\vec{v} = A^{-1}\vec{k}$

Exemple : Comment résoudre $AX = \lambda X$

on suppose $X \neq \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

A matrice 2x2 : donnée

λ : constante : donnée

$X = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$ vecteur : inconnue on a $AX = \lambda X \Leftrightarrow AX - \lambda X = 0$

$\Leftrightarrow AX - \lambda Id_2 X = 0 \quad \left(AX - \lambda \underbrace{\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} X}_{X}\right)$

$\Leftrightarrow (A - \lambda Id_2) X = 0$

$\lambda Id_2 = \lambda \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda&0\\0&\lambda\end{pmatrix}$

1D : $ax = \lambda x$

$ax - \lambda x = 0$

$x(a-\lambda) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $a = \lambda$

$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$ ⚠!!

$A = \begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$

$X = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \left(\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\lambda&0\\0&\lambda\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}a-\lambda & b\\ c & d-\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases}(a-\lambda)x_1 + bx_2 = 0 & (1)\\ cx_1 + (d-\lambda)x_2 = 0 & (2)\end{cases}$

$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ par hypothèse

$\Leftrightarrow \begin{cases}(1)\\ x_1 = \dfrac{-(d-\lambda)x_2}{c} \quad (\text{si } c \neq 0)\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}(a-\lambda)\cdot\left(-\left(\dfrac{d-\lambda}{c}\right)\cdot x_2\right) + bx_2 = 0\\ x_1 = -\dfrac{(d-\lambda)}{c}x_2 \quad (3)\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}-\dfrac{(a-\lambda)(d-\lambda)}{c}x_2 + bx_2 = 0\\ (3)\end{cases}$

3

$\frac{x}{2} = 1$ $\quad \frac{x}{2} = 0$

$x = 2$ $\quad x = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases}-\dfrac{(a-\lambda)(d-\lambda)x_2 + bcx_2}{c} = 0\\ (3)\end{cases}$

$\Leftrightarrow \dfrac{a}{b} = 0$

$\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases}-(a-\lambda)(d-\lambda)x_2 + bcx_2 = 0\\ (3)\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}\left(-(a-\lambda)(d-\lambda) + bc\right)x_2 = 0\\ (3)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_2 = 0 \text{ pas possible car } x_2 \neq 0\\ \text{ou}\\ bc - (a-\lambda)(d-\lambda) = 0\end{cases}$

$\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -\det\begin{pmatrix}a-\lambda & b\\ c & d-\lambda\end{pmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow \det\begin{pmatrix}a-\lambda & b\\ c & d-\lambda\end{pmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow \boxed{\det(A - \lambda Id_2) = 0}$

3. Système d'équations différentielles linéaires

On considère ici les systèmes suivants :

$$(S)\begin{cases}x_1'(t) = ax_1(t) + bx_2(t)\\ x_2'(t) = cx_1(t) + dx_2(t)\end{cases}$$

Rappel :

$x'(t) = f(x(t))$

$x'(t) = ax(t)$, $t \geq 0$

$\Rightarrow x(t) = x(0)e^{at}$

Si on pose $X(t) = \begin{pmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{pmatrix}$ alors $X'(t) = \begin{pmatrix}x_1'(t)\\x_2'(t)\end{pmatrix}$

et on a alors (S) : $X'(t) = \begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}X(t)$ si on note $A = \begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}x_1'(t)\\x_2'(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{pmatrix}$

alors on a $X'(t) = A.X(t)$

Méthode de résolution de $\boxed{X'(t) = AX(t)}$

① On cherche les solutions sous la forme $X(t) = e^{\lambda t}V$ où λ = constante

alors $X'(t) = \lambda e^{\lambda t}V$ et $V = \begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

Ainsi $X'(t) = AX(t) \Leftrightarrow \lambda e^{\lambda t}V = A.e^{\lambda t}V$

$\Leftrightarrow \boxed{\lambda V = AV}$

$\Leftrightarrow \quad AV - \lambda V = 0$

$\Leftrightarrow \quad AV - \lambda Id_2 V = 0$

$\Leftrightarrow \quad (A - \lambda Id_2)V = 0$

$\Leftrightarrow \quad \boxed{\det(A - \lambda Id_2) = 0}$

② Calculons $\det(A - \lambda Id_2) = \det\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$

$= \det\begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix}$

avec $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$tr(A) = a + d$

$\det(A) = ad - bc$

et $\det(A - \lambda Id_2) = 0 \Leftrightarrow \det\begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow (a-\lambda)(d-\lambda) - cb = 0$

$\Leftrightarrow ad - \lambda a - \lambda d + \lambda^2 - cb = 0$

$\Leftrightarrow \lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - cb = 0$

$\Leftrightarrow \boxed{\lambda^2 - tr(A).\lambda + \det(A) = 0}$

$ax^2 + bx + c = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$ $\quad \Delta > 0 \quad x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

$\Delta = 0 \quad x_1 = \frac{-b}{2a}$

$\Delta < 0$ 2 solutions complexes

<u>Remarque</u> : pour resoudre $X' = AX$ en cherchant les solutions sous la forme

$X = e^{\lambda t} V$

on doit trouver 2 valeurs λ : λ_1 et λ_2 (réelles ou complexes)

avec 2 vecteurs associés V_1 et V_2

de telle sorte que TOUTES les solutions de $X' = AX$ seront données

par $\boxed{X(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} V_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} V_2}$

c_1 et c_2 sont des constantes réelles que l'on détermine avec les conditions initiales $X(0) = \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0^1 \\ x_0^2 \end{pmatrix}$

OBJECTIF : trouver λ_1, λ_2 et V_1, V_2, puis c_1, c_2

③ <u>Resolvons</u> $\lambda^2 - tr(A)\lambda + \det(A) = 0$

discriminant : $\Delta = (-tr(A))^2 - 4\det(A)$

$= tr(A)^2 - 4\det A.$

$ax^2 + bx + c = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$

Rappel

si $\Delta > 0$

$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

CAS 1 $\boxed{\text{si } \Delta > 0}$ on a alors 2 solutions réelles distinctes λ_1 et λ_2

ici $\lambda_1 = \frac{tr(A) - \sqrt{\Delta}}{2}$ $\quad \lambda_2 = \frac{tr(A) + \sqrt{\Delta}}{2}$

on a donc 2 solutions qu'on appelle valeurs propres

<u>Remarque</u> : $\boxed{\lambda_1 + \lambda_2} = \frac{tr(A) - \sqrt{\Delta}}{2} + \frac{tr(A) + \sqrt{\Delta}}{2} = \frac{2tr(A)}{2} = \boxed{tr(A)}$

$\boxed{\lambda_1 \lambda_2} = \left(\frac{tr(A) - \sqrt{\Delta}}{2}\right)\left(\frac{tr(A) + \sqrt{\Delta}}{2}\right)$

$= \frac{(tr(A) - \sqrt{\Delta})(tr(A) + \sqrt{\Delta})}{4} = \frac{tr(A)^2 - \sqrt{\Delta}^2}{4} = \frac{tr(A)^2 - \Delta}{4}$

$= \frac{tr(A)^2 - tr(A)^2 + 4\det A}{4}$

$= \boxed{\det(A)}$

. Comment calculer V_1 et V_2 ? → prochaine séance

Supposons que l'on ait calculé λ_1, λ_2, V_1 et V_2 $\quad e^{\lambda_1 t} V_1 \quad e^{\lambda_2 t} V_2$ ←

<u>Rappel</u> : on avait par définition $\boxed{AV = \lambda V}$ donc $AV_1 = \lambda_1 V_1$

et $AV_2 = \lambda_2 V_2$

Si on pose la matrice $P = (V_1 | V_2)$ $\quad$ rappel : V_1 : vecteur $V_1 = \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{pmatrix}$

V_2 : vecteur $V_2 = \begin{pmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{pmatrix}$

alors $P = (V_1 | V_2) = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{21} \\ v_{12} & v_{22} \end{pmatrix}$

et $\boxed{AP} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_{11} & v_{21} \\ v_{12} & v_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a v_{11} + b v_{12} & a v_{21} + b v_{22} \\ c v_{11} + d v_{12} & c v_{21} + d v_{22} \end{pmatrix}$

$AV_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a v_{11} + b v_{12} \\ c v_{11} + d v_{12} \end{pmatrix}$

$AV_2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a v_{21} + b v_{22} \\ c v_{21} + d v_{22} \end{pmatrix}$.

$= (AV_1 \mid AV_2)$

$= (\lambda_1 V_1 \mid \lambda_2 V_2)$

$= (V_1 | V_2)\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ (en exercice)

$= P \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$

$= \boxed{P \cdot D}$ où $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$.

matrice diagonale

donc $\boxed{A.P = P.D}$ où $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $P = (V_1 | V_2)$ et $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$

24 janvier 2023

Rappel : $MM^{-1} = M^{-1}M = Id_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $Id_2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

ici $AP = PD$ on multiplie à gauche par P^{-1} (la matrice inverse de P)

on a alors $P^{-1}AP = \underbrace{P^{-1}P}_{= Id_2} D$

$\boxed{P^{-1}AP = D}$

Remarque : on peut passer de la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ à la matrice $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ (où λ_1 et λ_2 sont solutions de $AV = \lambda V$) en multipliant A à gauche par P^{-1} et à droite par P.

P est appellée pour ça, la matrice de passage.

méthode pour trouver P : on a $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ on cherche λ_1, V_1 et λ_2, V_2 tels que $AV_1 = \lambda_1 V_1$ et $AV_2 = \lambda_2 V_2$ $\left(V_1 \text{ et } V_2 \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$

ensuite on pose $P = (V_1 | V_2)$ et on calcule P^{-1} par la formule de l'inverse d'une matrice donnée plus haut dans le cours.

Retour à l'equation differentielle : $(S) \begin{cases} x_1' = a x_1 + b x_2 \\ x_2' = c x_1 + d x_2 \end{cases}$

que l'on peut écrit "sous forme vectorielle"

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

et en posant $\boxed{X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}$ et $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ça donne

$\boxed{X' = AX}$

Astuce : si on pose $\boxed{X = PY}$ où Y sera une inconnue et $P = (V_1 | V_2)$ (matrice de passage)

$\hookrightarrow Y := Y(t)$

on a alors : $\boxed{X' = PY'}$

on multiplie par P^{-1} à gauche

d'autre part on a : $X' = AX$ donc on a : $X' = AX \iff \boxed{P^{-1}X'} = P^{-1}AX$

$= \boxed{P^{-1}APY}$ $X = PY$

et comme $X' = PY'$ en multipliant par P^{-1} on a : $\boxed{P^{-1}X'} = \underbrace{P^{-1}P}_{Id_2} Y' = Id_2 Y'$

$= \boxed{Y'}$

$\iff Y' = P^{-1}APY$

$Y' = \underbrace{D}\,Y$ car on a vu plus haut que $P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}$

<u>Conclusion</u>: Resoudre l'equation differentielle

$\underbrace{X' = AX}_{\text{problème compliqué}}$ revient à résoudre $\underbrace{Y' = DY}_{\text{problème plus simple}}$ où $X = PY$ avec $P = (V_1 | V_2)$ et V_1, V_2 sont les vecteurs associés aux valeurs propres λ_1 et λ_2

Retour au <u>cas</u> 1 : $\boxed{\Delta > 0}$ (rappel $\Delta = tr(A)^2 - 4\det A$)

on a alors 2 <u>racines réelles qui sont distinctes</u> : λ_1 et λ_2

et d'après ce qu'on vient de voir ecrire $X' = AX$ revient à écrire $Y' = DY$ où $D = \begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}$

Autrement dit on résout : si $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ alors on a $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$

ce qui donne le système : $\begin{cases} y_1' = \lambda_1 y_1 \\ y_2' = \lambda_2 y_2 \end{cases}$ système beaucoup plus <u>simple</u> !

on peut le resoudre "à la main" : le système est decouplé, il ne dépend que de y_1 sur la 1ère ligne et que de y_2 sur la 2ème ligne

on a $\begin{matrix} y_1' = \lambda_1 y_1 \\ y_2' = \lambda_2 y_2 \end{matrix} \overset{\text{L2 - Exemple SPS}}{\Rightarrow} \begin{cases} y_1(t) = e^{\lambda_1 t} y_1(0) = e^{\lambda_1 t} c_1 & \text{où } c_1 = y_1(0) \\ y_2(t) = e^{\lambda_2 t} y_2(0) = e^{\lambda_2} c_2 & \text{où } c_2 = y_2(0) \end{cases}$ on a alors les solutions

<u>Question</u> : comment dessiner le graphe des solutions ?

Réponse : il y a plusieurs sous-cas possibles

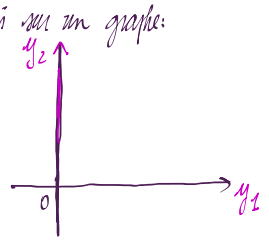
ⓐ $\boxed{\text{Si } \lambda_1 \lambda_2 = 0}$ (soit $\lambda_1 = 0$ ou $\lambda_2 = 0$) c'est à dire qu'une des 2 valeurs propres est nulle.

(i) supposons que ce soit $\lambda_1 = 0$

on a alors $y_1(t) = e^0 y_1(0) = 1 . y_1(0) = c_1$

$y_2(t) = e^{\lambda_2 t} y_2(0) = e^{\lambda_2 t} . c_2$ (c_1 et c_2 constantes)

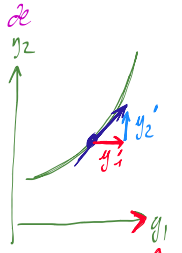
representation sur un graphe :



on a $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 < 0$

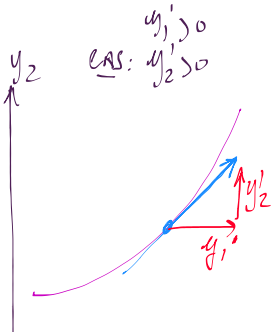
$\begin{cases} y_1' = 0 \\ y_2' = \lambda_2 y_2 \end{cases}$

<u>Remarque importante</u> : $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix}$ est le vecteur de variation de la fonction $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$.

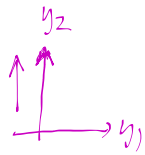


Autrement dit y_1' : la composante horizontale

- si $y_1' > 0 \Rightarrow y_1$ est croissant donc la composante horizontale du vecteur va vers la droite (là où y_1 croit) $\nearrow$ $\rightarrow$
- si $y_1' < 0 \Rightarrow y_1$ est decroissant donc la composante va vers la gauche $\leftarrow$
- si $y_1' = 0$ pas de deplacement horizontal, il n'y a que du deplacement vertical

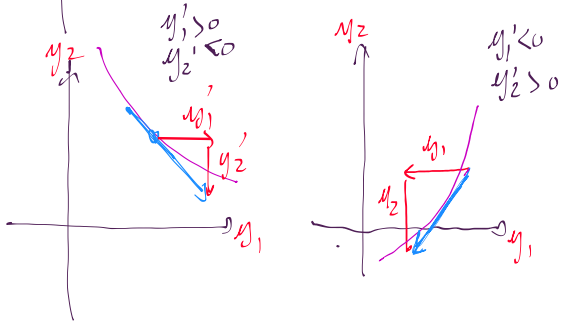


De façon analogue : y_2' : est la composante verticale du vecteur tangent à la courbe.



donc si $y_2' > 0$: y_2 est croissant

donc le vecteur va vers le haut (la composante verticale)



si $y_2' < 0$: y_2 est décroissant, le vecteur va vers le bas (la composante verticale est tournée vers le bas

si $y_2' = 0$ y_2 n'a pas de déplacement vertical il n'y a plus que du déplacement horizontal

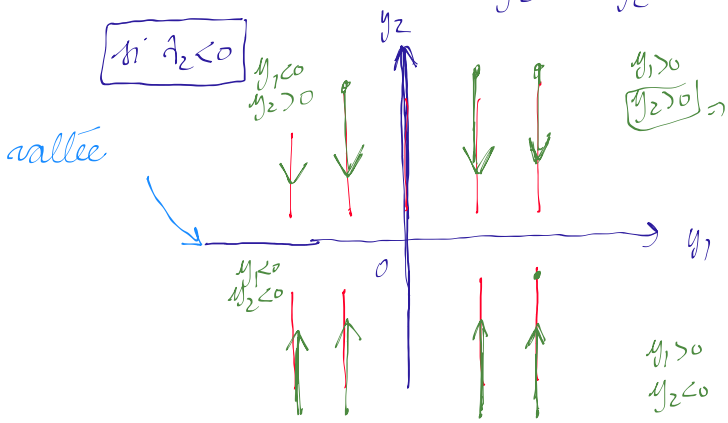
Retour au cas (i) $\lambda_1 = 0$

on a $\begin{cases} y_1' = \lambda_1 y_1 \\ y_2' = \lambda_2 y_2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} y_1' = 0 \\ y_2' = \lambda_2 y_2 \end{cases}}$ $\Rightarrow$ pas de mouvement horizontal : que vertical

$\Rightarrow$ comme $\lambda_2 < 0$ si $y_2 < 0$ i $\lambda_2 y_2 > 0$

si $y_2 > 0$ $\lambda_2 y_2 < 0$

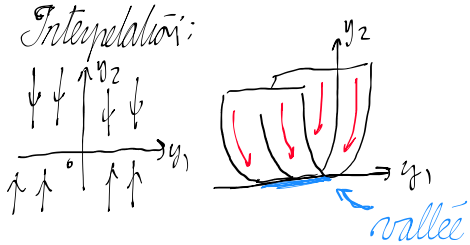
$\boxed{\text{si } \lambda_2 < 0}$



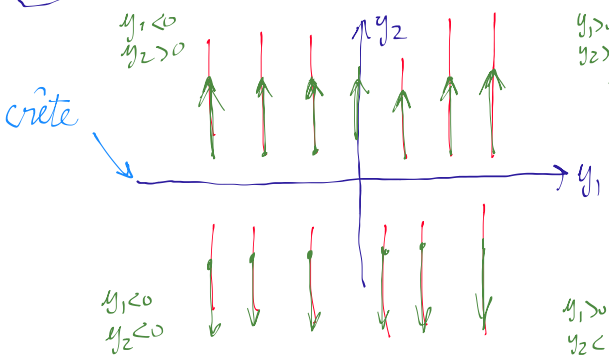
$y_1 > 0$
$\boxed{y_2 > 0} \Rightarrow \lambda_2 y_2 < 0 \Rightarrow y_2' < 0$
$\lambda_2 < 0$, $y_2 > 0$

$y_1 > 0$
$y_2 < 0 \Rightarrow \lambda_2 y_2 > 0$
$\lambda_2 < 0$, $y_2 < 0$

Interpolation :



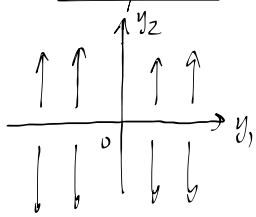
$\boxed{\text{si } \lambda_2 > 0}$ (ii) $\lambda_1 = 0$ mais $\lambda_2 > 0$

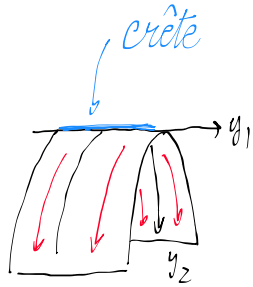


$y_1 > 0$
$y_2 > 0$
$\begin{cases} y_1' = 0 \\ y_2' = \lambda_2 y_2 \end{cases}$
$\lambda_2 y_2 > 0 \Rightarrow y_2' > 0$

$y_1 > 0$
$y_2 < 0$ $\lambda_2 y_2 < 0 \Rightarrow y_2' < 0$

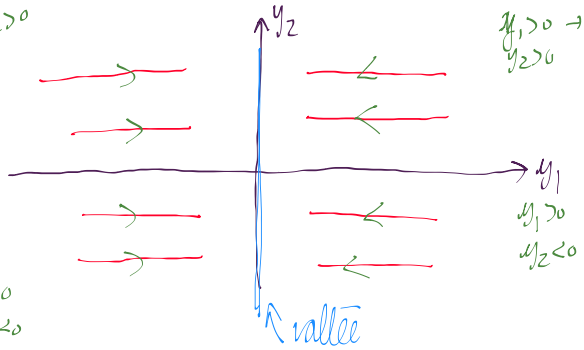
Interpolation





(iii) $\lambda_2 = 0$ et $\lambda_1 < 0$

$\lambda_1 y_1 > 0 \rightarrow y_1 < 0$
$y_1' > 0$ $\quad y_2 > 0$



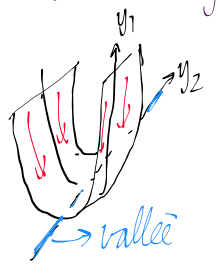
$y_1 > 0 \rightarrow \lambda_1 y_1 < 0$
$y_2 > 0$ $\quad \Rightarrow y_1' < 0$

$y_1 > 0$
$y_2 < 0$

$y_1 < 0$
$y_2 < 0$

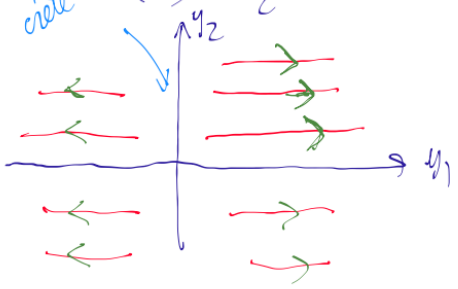
Rappel : $\begin{cases} y_1' = \lambda_1 y_1 \\ y_2' = \lambda_2 y_2 \end{cases} \xrightarrow[\lambda_2 = 0]{\lambda_1 < 0} \begin{cases} y_1' = \lambda_1 y_1 \\ y_2' = 0 \end{cases}$

Interpolation



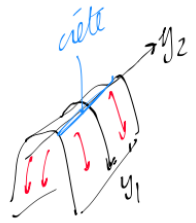
?

(ii) $\lambda_2 = 0$ et $\lambda_1 > 0$



$y_1' = \lambda_1 y_1$

$y_2' = 0$



(b) Si $\boxed{\lambda_1 \lambda_2 \neq 0}$ on a alors 2 autres sous cas :

(i) $\boxed{\lambda_1 \lambda_2 > 0}$ on est sûrs que λ_1 et $\lambda_2 \neq 0$!!!

on avait $\begin{cases} y_1' = \lambda_1 y_1 \\ y_2' = \lambda_2 y_2 \end{cases}$ on se rappelle que (voir plus haut)

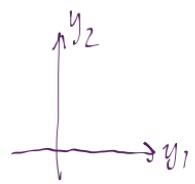
$$\underbrace{\begin{cases} y_1 = c_1 e^{\lambda_1 t} & (1) \\ y_2 = c_2 e^{\lambda_2 t} & (2) \end{cases}}$$

on suppose c_1 et $c_2 \neq 0$

on élève (1) à la puissance λ_2 : $y_1^{\lambda_2} = c_1^{\lambda_2} e^{\lambda_1 \lambda_2 t}$

(2) " " λ_1 $y_2^{\lambda_1} = c_2^{\lambda_1} e^{\lambda_1 \lambda_2 t}$

on fait $\frac{(1)}{(2)} = \boxed{\frac{y_1^{\lambda_2}}{y_2^{\lambda_1}}} = \frac{c_1^{\lambda_2}}{c_2^{\lambda_1}} = \boxed{c_3}$



donc $y_1^{\lambda_2} = c_3 y_2^{\lambda_1}$

$\Leftrightarrow y_2^{\lambda_1} = \frac{1}{c_3} y_1^{\lambda_2}$

puissance $1/\lambda_1$

$\Leftrightarrow y_2 = \left(\frac{1}{c_3}\right)^{1/\lambda_1} y_1^{\lambda_2/\lambda_1}$

$= \underset{\uparrow \text{constante}}{K} \cdot y_1^{\alpha}$ où $\boxed{\alpha = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}}$

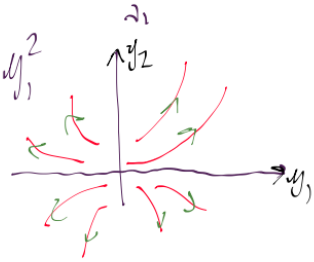
on a alors des courbes du type $y_2 = K y_1^{\alpha}$

exemple : si $\lambda_2 = 2\lambda_1$ on a $\alpha = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = 2$

et $y_2 = K y_1^2$

$\lambda_1, \lambda_2 > 0$

λ_1 et λ_2 de même signe : si $\lambda_1, \lambda_2 > 0$

comme $y_1 = c_1 e^{\lambda_1 t} \longrightarrow \pm\infty$

$y_2 = c_2 e^{\lambda_2 t} \longrightarrow \pm\infty$