Master 2

Statistique, modélisation et science des données (SMSD)

Mathématiques pour la santé

Laurent PUJO-MENJOUET

Laurent PUJO - MENJOUET

↑ PAS DE T !

BRACONNIER BUREAU 246

pujo@math.univ-lyon1.fr - math.univ-lyon1.fr\~pujo

Equations aux dérivées partielles appliquées à la biologie et la médecine

PARTIE 1, équations paraboliques = équations de réaction-diffusion :
- structures de Turing
- ondes de propagation

PARTIE 2 : équations hyperboliques & équations différentielles à retard

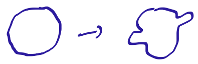
---

PARTIE 1 : Equations paraboliques : équations de réaction-diffusion

I Introduction

Introduction

Dans un contexte biologiques, les systèmes de réaction-diffusion ont été introduits par ALAN TURING en 1952 pour étudier la MORPHOGENÈSE (apparitions de formes dans l'embryon) au cours de laquelle des formes semblent apparaître "à partir de rien"



Turing a montré que ce type d'émergence de forme peut avoir lieu dans des systèmes très simples comme des mélanges d'espèces chimiques soumises à la diffusion et la réaction.

Ces formes sont appelées structures de Turing et ont été utilisées depuis les années 70 dans de très nombreux travaux de biomathématiques:

Ref: JAMES MURRAY (2 VOLUME) MATHEMATICAL BIOLOGY

II Diffusion:

L'équation type décrivant les phénomènes de diffusion est:

L'équation type décrivant les phénomènes de diffusion est:

$\frac{\partial}{\partial t} u(t,x) = d \Delta u(t,x)$: équation de la chaleur - FOURIER.

u: quantité qui diffuse

t: temps $t > 0$

x: espace $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^N$ $N = 1, 2, 3$ (ici $N=1$) : en 1D: $[0, L]$, $L > 0$

$\frac{\partial}{\partial t}$: dérivée partielle par rapport au temps

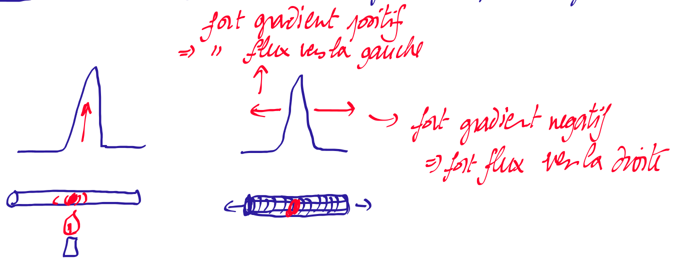
Δ : opérateur de diffusion appelé LAPLACIEN

en 1D: $\Delta u(t,x) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t,x)$

en 2D: $\Delta u(t,x) = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} u(t,x) + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} u(t,x)$ $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$d > 0$ coefficient de diffusion

Définition : La diffusion est un phénomène pour lequel le flux est proportionnel au gradient.



la diffusion aplatit les bosses d'autant plus vite que d est grand.

Question : que se passerait-il si $d<0$? on aura alors de la concentration

ce n'est pas le phénomène que l'on étudie ici ! Ici on aura toujours $\boxed{d>0}$

Conditions aux limites

$$\frac{\partial}{\partial t}u = \alpha \Delta u \qquad \text{càd en 1D: } \frac{\partial}{\partial t}u = \alpha \frac{\partial^2}{\partial x^2}u$$

1 condition initiale

2 conditions aux bords

condition initiale: $u(0,x) = f(x)$ (connue, donnée au début de l'expérience)

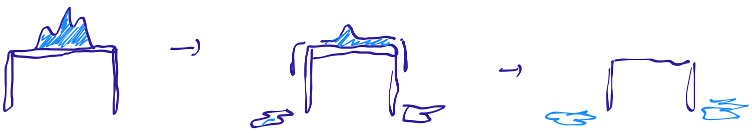
$x \in \Omega = [0,L]$.

conditions aux bords:

- DIRICHLET homogène

$u(t,0) = 0$ et $u(t,L) = 0$

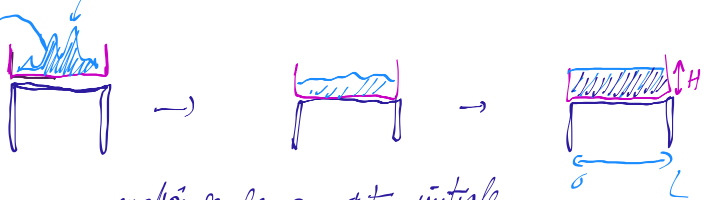
$t \geq 0$



$\lim_{t \to +\infty} u(t,x) = 0$

- NEUMANN homogène

$t \geq 0 \quad \frac{\partial}{\partial x}u(t,0) = \frac{\partial}{\partial x}u(t,L) = 0$



on a conservation de la quantité initiale

$\int_0^L f(x)\,dx = \int_0^L u(t,x)\,dx =$

$L \times H = \int_0^L f(x)\,dx$

$H = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)\,dx$

Notre système est complet :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u(t,x) = d\,\Delta u(t,x) & t \geq 0, \quad x \in [0,L] \\ u(0,x) = f(x) & x \in [0,L] \\ + \text{ conditions aux bords} & t \geq 0 \end{cases}$$

Question : comment résout-on ce type d'équation ?

Réponse : en utilisant un outil mathématique appelé : FONCTION PROPRE

II Les fonctions propres :

Définition : Une fonction propre de l'opérateur de diffusion Δ (avec conditions aux bords) est un profil spatial i.e. $w : x \mapsto w(x)$ (une forme) tel que :

1. w est définie sur $[0,L]$
2. w', w'' — " — $[0,L]$
3. w vérifie les conditions aux bords

3. w vérifie les conditions aux bords

4. $w \not\equiv 0$ sur $[0,L]$

5. $\Delta w(x) = \lambda w(x)$ (si $\lambda > 1$: amplification ; si $0 < \lambda < 1$: aplatissement) mais la forme ne varie pas

On appelle λ la valeur propre associée à la fonction propre w.

<u>Exercice 1</u> : quelles sont les fonctions propres w associées à Dirichlet homogène ?

w doit satisfaire 1, 2, 3, 4, 5 en particulier si $x \in [0,L]$ $\Delta w(x) = \lambda w(x)$

c'est à dire $\boxed{w''(x) = \lambda w(x)}$

on cherche les solutions sous la forme $w(x) = e^{rx}$, $r \in \mathbb{C}$

on remplace: $r^2 e^{rx} = \lambda e^{rx} \quad x \in [0, L]$

$\Leftrightarrow \boxed{r^2 = \lambda}$ équation caractéristique

<u>CAS 1</u>: $\boxed{\lambda > 0}$ on a alors 2 solutions $r_1 = \sqrt{\lambda}$ et $r_2 = -\sqrt{\lambda}$ $\quad (r_1 = -r_2)$

Par conséquent les solutions de $w''(x) = \lambda w(x)$ sont données par:

$$w(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$$

Cherchons C_1 et C_2 grâce aux conditions de Dirichlet: $w(0) = w(L) = 0$

- $w(0) = 0 \Leftrightarrow C_1 e^0 + C_2 e^0 = 0 \Leftrightarrow C_1 + C_2 = 0 \Leftrightarrow C_1 = -C_2$

donc $w(x) = C_1 \left(e^{r_1 x} - e^{-r_1 x} \right)$

- $w(L) = 0 \Leftrightarrow C_1 \left(e^{r_1 L} - e^{-r_1 L} \right) = 0$

$\nearrow C_1 = 0$ impossible car $w \not\equiv 0$ sur $[0, L]$

$\searrow e^{r_1 L} = e^{-r_1 L} = \frac{1}{e^{r_1 L}} \Leftrightarrow \left(e^{r_1 L} \right)^2 = 1$

$\Rightarrow \underbrace{r_1}_{>0} \underbrace{L}_{>0} = 0$ <u>IMPOSSIBLE</u> $\quad (r_1 = \sqrt{\lambda},\ L > 0)$

CAS $\lambda > 0$: N'A PAS DE <u>SOLUTIONS</u>

CAS 2 $\boxed{\lambda = 0}$ $\quad w''(x) = 0$

$\Leftrightarrow \quad w'(x) = C_1$

$\Leftrightarrow \quad w(x) = C_1 x + C_2$

conditions aux bords: • $w(0) = 0 \Leftrightarrow C_1 \cdot 0 + C_2 = 0$

$\Leftrightarrow \quad \boxed{C_2 = 0}$

donc $w(x) = C_1 x$

$) = c_1 x$

• $w(L) = 0 \Leftrightarrow c_1 \underbrace{L}_{>0} = 0$

$\Rightarrow c_1 = 0$ IMPOSSIBLE car $w \not\equiv 0$!!

CAS $\lambda = 0$ n'a pas de solution non plus !

$\boxed{\text{CAS 3}}$ $\boxed{\lambda < 0}$ on a $r^2 = \lambda = -|\lambda| = i^2|\lambda| \rightarrow r = \pm i\sqrt{|\lambda|}$

on a donc 2 solutions complexes conjuguées $r_1 = \alpha + i\beta$, $r_2 = \alpha - i\beta$) ici $\alpha = 0$, $\beta = \sqrt{|\lambda|}$

$w(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}$

qu'on peut écrire

$$\left[w(x) = e^{\alpha x} \left(c_1 \cos(\beta x) + c_2 \sin(\beta x) \right) \right]$$

mais ici $\alpha = 0$ on a alors

$$w(x) = c_1 \cos(\beta x) + c_2 \sin(\beta x)$$

Calculons c_1 et c_2 :

• $w(0) = 0 \quad c_1 \underbrace{\cos(0)}_{1} + c_2 \overbrace{\sin(0)}^{0} = 0 \Rightarrow c_1 = 0$

donc $w(x) = c_2 \sin(\beta x)$

• $w(L) = 0 \Leftrightarrow c_2 \sin(\beta L) = 0$ ↗ $c_2 = 0$ PAS POSSIBLE car $w \not\equiv 0$

↘ $\sin(\beta L) = 0$ $\quad \beta L = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

$\sqrt{|\lambda|} \geq 0$, >0

$k = \dfrac{\sqrt{|\lambda|} . L}{\pi}$, >0 $\quad k \in \mathbb{N}^*$

$\sqrt{|\lambda|} = \dfrac{k\pi}{L}$

Donc $\boxed{w_k(x) = c_2 \sin\left(\frac{k\pi}{L} . x\right)}$ $k \in \mathbb{N}^*$

et $\sqrt{|\lambda|} = \frac{k\pi}{L} \Rightarrow |\lambda| = \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2$

$\Rightarrow -\lambda = \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 \Rightarrow \boxed{\lambda = -\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2}$

comme, $w''(x) = \lambda w(x)$ $\qquad \tilde{w}(x) = c\, w(x)$ $\quad c \neq 0$

$c\, w''(x) = \lambda c\, w(x)$ $\qquad \tilde{w}''(x) = c\, w''(x)$

donc sans perte de généralité on prend $\underline{c_2 = 1}$

Conclusion : les fonctions propres associées à Δ pour Dirichlet sur $[0, L]$

sont $w_k(x) = \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right)$ $\quad k \in \mathbb{N}^*$

sont : $\boxed{\begin{array}{l} \omega_k(x) = \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \\ \text{et } \lambda_k = -\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 \end{array}}$, $k \in \mathbb{N}^*$

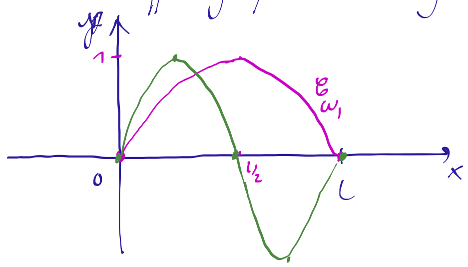
Exercice 2 : Même exercice pour NEUMANN

$\hookrightarrow \quad \omega_k(x) = \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right)$, $k \in \mathbb{N}$ PAS DE *

$\lambda_k = -\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2$

Remarque : k est appelé fréquence de la fonction propre

Dirichlet :



$k=1 \quad \omega_1(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$

$k=2 \quad \omega_2(x) = \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)$

$\frac{2\pi . 3L}{2 \cdot 4L}$

Remarque : En fait, pour n'importe quelle dimension ($\Omega \subset \mathbb{R}^N$) avec toutes les conditions aux bords usuelles (Dirichlet, Neumann, ..) on peut montrer qu'il y a une infinité dénombrable de fonctions propres $(\omega_0), \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k \dots$ associées à des valeurs propres $(\lambda_0), \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k, \dots$ qui sont forcément ≤ 0 on les numérote en commençant par la plus grande :

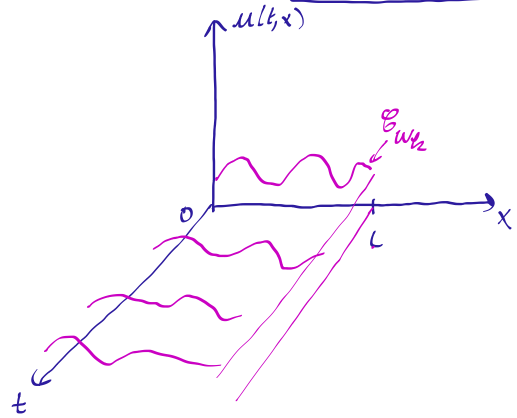
$$\dots \leq \lambda_3 \leq \lambda_2 \leq \lambda_1 \leq \lambda_0 \leq 0$$

III Résolution de l'équation de la chaleur

1. CAS : condition initiale est une fonction propre.

fonction propre

On suppose que $\boxed{u(0,x) = w_k(x)}$ $k \in \mathbb{N}^*$, $x \in [0,L]$



(1) $\frac{\partial}{\partial t} u(t,x) = d \Delta u(t,x)$

$= d \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t,x)$ $x \in [0,L]$, $t \geq$

On cherche les solutions sous la forme

$u(t,x) = \alpha(t) . w_k(x)$ méthode de séparation des variables

Résolvons avec cette hypothèse

on remplace dans (1) $\frac{\partial}{\partial t} (\alpha(t). w_k(x)) = d. \Delta (\alpha(t) w_k(x))$

$\Leftrightarrow w_k(x). \alpha'(t) = d. \alpha(t) \Delta w_k(x)$] w_k fonction propre

$= d. \alpha(t). \lambda_k w_k(x)$

$\Leftrightarrow \cancel{w_k(x)} \alpha'(t) = d. \lambda_k \alpha(t) \cancel{w_k(x)}$

$\Leftrightarrow \boxed{\alpha'(t) = d. \lambda_k \alpha(t)}$

$$\Rightarrow \quad \alpha(t) = \alpha(0)\, \underbrace{e^{\lambda_k d t}}_{\substack{\downarrow t\to+\infty \\ 0 \text{ si } d\lambda_k<0}} \qquad \lambda_k \leq 0 \quad d>0$$

$$u(t,x) = \alpha(0) e^{\lambda_k d t} \omega_k(x) \underset{\substack{t\to+\infty \\ \lambda_k<0}}{\longrightarrow} 0$$

<u>que vaut $\alpha(0)$</u> : $\quad u(t,x) = \alpha(0) e^{\lambda_k d t} \omega_k(x)$

$$u(0,x) = \alpha(0) \underset{1}{e^0} \omega_k(x) \quad \text{or} \quad u(0,x) \overset{hyp}{=} \omega_k(x)$$

donc $\alpha(0)=1$

b. <u>CAS</u> : condition initiale est une combinaison linéaire de 2 FONCTIONS PROPRES

On suppose $\quad u(0,x) = \alpha_{k_1} \omega_{k_1}(x) + \alpha_{k_2} \omega_{k_2}(x)$

On utilise alors le principe de superposition : autrement dit la solution de l'équation est la combinaison de 2 solutions : celle avec $\alpha_{k_1}\omega_{k_1}(x)$ comme condition initiale

et $\alpha_{k_2}\omega_{k_2}(x)$ —

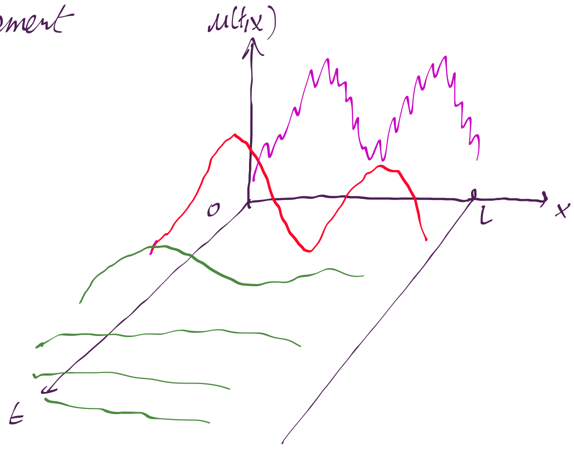
Par conséquent $u(t,x) = \alpha_{k_1} e^{d\lambda_{k_1} t} \omega_{k_1}(x) + \alpha_{k_2} e^{d\lambda_{k_2} t} \omega_{k_2}(x)$

Par conséquent $u(t,x) = \alpha_{k_1} e^{d\lambda_{k_1} t} w_{k_1}(x) + \alpha_{k_2} e^{d\lambda_{k_2} t} w_{k_2}(x)$

Remarque : si λ_{k_1} et λ_{k_2} sont <0 on aura $e^{d\lambda_{k_1} t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$ et $e^{d\lambda_{k_2} t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$

et si $\lambda_{k_2} > \lambda_{k_1}$ $e^{d\lambda_{k_2} t} \to 0$ + vite que $e^{d\lambda_{k_1} t}$

Autrement dit plus la fréquence est "grande" (petite négativement) plus le terme associé tend vers 0 rapidement
en val. absolue



c. CAS : condition initiale est "quelconque"

On suppose que $u(0,x) = f(x)$

On se ramène au cas précédent s'il est possible de décomposer f en somme infinie de fonctions propres. Cette idée est à la base de la théorie des séries de Fourier.

sur $\underline{\Omega = [0,L]}$

<u>Proposition</u> : Toute fonction L-périodique et de <u>carré</u> intégrable sur $[0,L]$ (càd $\int_0^L f(x)^2 dx < +\infty$) se décompose comme une somme infinie de cosinus et de sinus

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right)$$

Les a_n et b_n sont appelés les coefficients de Fourier et cette somme est appelée série de Fourier (les a_n et b_n se calculent en fonction de f

$\int f \cdot \cos$ $\quad \int f \cdot \sin$

Exercice : Soit $\Omega = [0, \pi]$ avec Neumann homogène

1. Déterminer les fonctions propres et valeurs propres du Laplacien associées à cette géométrie.

2. Dessiner les 3 premières fonctions propres

3. On suppose que $u(0,x) = 3 + 0.1\cos(x) + 0.1\cos(6x)$

3.1. On suppose $d = 1$ résoudre l'équation de la chaleur
$$\begin{cases} \Omega = [0,\pi] \\ \text{Neumann} \end{cases}$$

3.2. Calculer $\lim\limits_{t \to +\infty} u(t,x)$?

Conclusion : si f satisfait les hyp. de la proposition des séries de Fourier

$$u(0,x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right)$$

$$\text{et } u(t,x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(a_n e^{-d\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n e^{-d\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right)$$

IV Les systèmes de réaction-diffusion

Comme l'équation de la chaleur "aplatit" les bosses il est impossible d'obtenir des émergences de forme.

Turing a donc proposé l'étude de systèmes de réaction-diffusion.

On considère le système suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u(t,x) = f(u(t,x), v(t,x)) + d_u \Delta u(t,x) & x \in [0,L],\ t \geq 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} v(t,x) = g(u(t,x), v(t,x)) + d_v \Delta v(t,x) & \text{"} \end{cases}$$

$$\underbrace{f,\ g}_{\text{réaction}} \qquad \underbrace{d\,\Delta}_{\text{diffusion}}$$

1. Une seule équation de réaction-diffusion

Considérons l'équation : $\frac{\partial}{\partial t} u(t,x) = f(u(t,x)) + d\,\Delta u(t,x)$ (E)

Définition : EQUILIBRE HOMOGÈNE :

Un équilibre homogène de (E) est une valeur u_0 (constante)

(stationnaire : indép. du temps, et homogène : indépendante de x)

Par conséquent $\frac{\partial}{\partial t} u_0 = 0$ et $\Delta u_0 = 0$

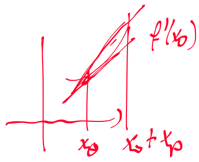
On a ainsi u_0 qui vérifie $\boxed{f(u_0) = 0}$

Etude de la stabilité : Soit u_0 un équilibre et soit $u_p(t,x)$ une petite perturbation de cet équilibre si $u_p(t,x) \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$ alors u_0 est localement asymptotiquement stable (LAS)

sinon u_0 est instable

On pose $u(t,x) = u_0 + u_p(t,x)$ et on remplace dans (E)

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(u_0 + u_p(t,x)\right) = f\left(u_0 + u_p(t,x)\right) + d\Delta\left(u_0 + u_p(t,x)\right)$$



$$f'(x_0) \simeq \frac{f(x_0+x_p) - f(x_0)}{x_0+x_p-x_0}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} u_p(t,x) = \underbrace{f\left(u_0 + u_p(t,x)\right)} + d\Delta u_p(t,x)$$

on linéarise autour de u_0 : $f(u_0 + u_p(t,x)) \simeq \underset{0}{f(u_0)} + f'(u_0).u_p(t,x)$

$\simeq f'(u_0)u_p(t,x)$

<u>Linéarisation</u>

$$\frac{\partial}{\partial t} u_p(t,x) = f'(u_0).u_p(t,x) + d\Delta u_p(t,x)$$

Si $u_p(0,x) = w_k(x)$ une fonction propre, associée au problème

on cherche $u_p(t,x)$ sous la forme $\alpha(t)\, w_k(x)$

$$\frac{\partial}{\partial t}\alpha(t)\, w_k(x) = f'(u_0).\alpha(t)\, w_k(x) + d\Delta\, \alpha(t)\, w_k(x)$$

$$\Leftrightarrow \cancel{w_k(x)}\, \alpha'(t) = f'(u_0)\,\alpha(t)\cancel{w_k(x)} + d.\lambda_k\, \alpha(t)\cancel{w_k(x)}$$

$$\Rightarrow \quad \alpha'(t) = \left(f'(u_0) + d\lambda_k\right)\alpha(t)$$

donc $\alpha(t) = \alpha(0)\, e^{(f'(u_0)+d\lambda_k)t}$

donc $u_p(t,x) = \text{''}\; e^{(f'(u_0)+d\lambda_k)t}\, w_k(x)$

Conclusion :

Proposition : si $f'(u_0) + d\lambda_k < 0$ alors u_0 est LAS

si $f'(u_0) + d\lambda_k > 0$ " u_0 est INSTABLE

Exercice : On considère l'équation :

$$\frac{\partial}{\partial t} u = u(1-u) + 2\Delta u \qquad \text{Equation de FISHER}$$

1. Quels sont les équilibres

2. Etudier leur stabilité avec $\Omega = [0,\pi]$ + Neumann

$$\lambda_k = -\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 \underset{L=\pi}{=} -k^2 \qquad k \in \mathbb{N}$$

Réponse : 1. On pose $f : u \mapsto u(1-u) = u - u^2$

$f(u_0) = 0 \iff u_0 = 0$ ou $u_0 = 1$ on a donc 2 équilibres

2. Pour $\boxed{u_0 = 0}$ $\quad f'(u) = 1 - 2u$

$$f'(0) = 1$$

et donc $f'(0) + 2(-k^2) = f'(0) - 2k^2 \quad (k \in \mathbb{N})$

$$= 1 - 2k^2$$

$1 - 2k^2 < 0 \iff 1 < 2k^2$

$\iff \frac{1}{2} < k^2 \quad k \in \mathbb{N}$: càd si $k \in \mathbb{N}^*$: u_0 LAS.

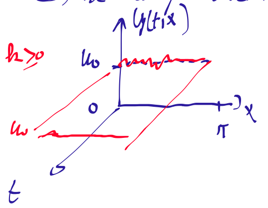
pour toutes les perturbations de fréquence $k > 0$

si $k = 0$: u_0 est instable

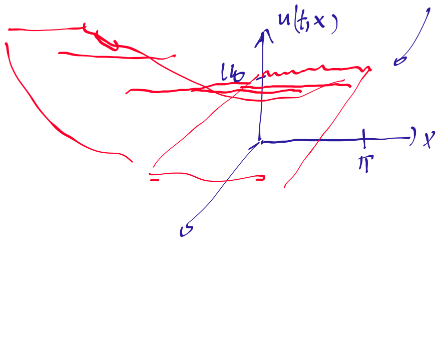
$u_p(0,x) = g(x)$

→ se décompose avec Fourier en $\cos(..)$: que des fréquences > 0

$w_0(x) = 1$



$k=0$ dans la perturbation



k

si $u_0 = 1$

$f'(u_0) = 1 - 2 = -1$

$f'(u_0) + d\lambda_k = -1 - 2k^2 < 0$ THEN : <u>TJS LAS</u> .

Pour avoir l'emergence d'une forme <u>NON PLATE</u> Turing a montré qu'il fallait au moins un système de 2 équations de réaction diffusion

2. Système de 2 équations de réaction-diffusion.

2. Système de 2 équations de réaction-diffusion.

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u = f(u,v) + d_u \Delta u & + \text{C.I} \\ \frac{\partial}{\partial t} v = g(u,v) + d_v \Delta v & + \text{C.B.} \end{cases}$$

notation : on écrit quelques fois

$\frac{\partial}{\partial t} u = u_t \qquad \Delta u = u_{xx}$

<u>écriture vectorielle</u>

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(u,v) \\ g(u,v) \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} d_u & 0 \\ 0 & d_v \end{pmatrix}}_{D = \begin{pmatrix} d_u & 0 \\ 0 & d_v \end{pmatrix}} \Delta \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

13 décembre 2022

Un équilibre homogène de ce système $\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$ vérifie $\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\Delta \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

donc $\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$ vérifie $f(u_0, v_0) = 0$ et $g(u_0, v_0) = 0$

Pour étudier la stabilité linéaire de cet équilibre, on le perturbe

Pour étudier la stabilité linéaire de cet équilibre, on le perturbe.

On pose $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_p \\ v_p \end{pmatrix}$ où $\begin{pmatrix} u_p(t,x) \\ v_p(t,x) \end{pmatrix}$ est une "petite perturbation"

Le système s'écrit alors:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_p \\ v_p \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} f(u_0+u_p, v_0+v_p) \\ g(u_0+u_p, v_0+v_p) \end{pmatrix} + D\Delta\left(\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_p \\ v_p \end{pmatrix}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} u_p \\ v_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & " & \end{pmatrix} + D\Delta\begin{pmatrix} u_p \\ v_p \end{pmatrix}$$

Étape suivante: on linéarise

Rappel:

$$\begin{pmatrix} f(u_0+u_p, v_0+v_p) \\ g(u_0+u_p, v_0+v_p) \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} \overset{0}{\overset{\shortparallel}{f(u_0, v_0)}} \\ \underset{0}{\underset{\shortparallel}{g(u_0, v_0)}} \end{pmatrix} + J_{(f,g)}(u_0, v_0)\begin{pmatrix} u_p \\ v_p \end{pmatrix}$$

où $J_{(f,g)}(u_0, v_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial u} f(u_0, v_0) & \frac{\partial}{\partial v} f(u_0, v_0) \\ \frac{\partial}{\partial u} g(u_0, v_0) & \frac{\partial}{\partial v} g(u_0, v_0) \end{pmatrix}$

Pour résoudre le système linéarisé on utilise à nouveau les fonctions propres de la diffusion. On choisit ω_n une fonction propre associée au problème et on pose $\begin{pmatrix} u_p \\ v_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \end{pmatrix} \omega_n(x)$

<u>Dans ce cas là</u> : (L) s'écrit :

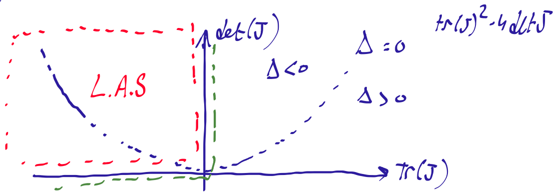
$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \end{pmatrix} w_n(x) \right) = J_{(f,g)}(u_0,v_0) \begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \end{pmatrix} w_n(x) + D\Delta \begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \end{pmatrix} w_n(x)$$

On obtient alors

$$\cancel{\omega_n(x)} \begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \end{pmatrix}' = \overbrace{J_{(f,g)}(u_0,v_0)}^{J} \begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \end{pmatrix} \cancel{w_n(x)} + D \begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \end{pmatrix} \lambda_n \cancel{w_n(x)}$$

<u>Ce qui donne</u>

$$(E) \quad \begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \end{pmatrix}' = \left(J + \lambda_n D \right) \begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \end{pmatrix} \qquad (\text{càd} : X' = AX)$$



INSTABLE

L'équation (E) possède une solution qui s'écrit

$$\begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \beta_0 \end{pmatrix} e^{(J+\lambda_n D)t}$$

la stabilité de $\begin{pmatrix} u_p \\ v_p \end{pmatrix}$ dépendra donc du signe de la partie réelle des valeurs propres de $J+\lambda_n D$

On procède alors en 2 étapes:

$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

① il faut que sans diffusion (càd $d_u = d_v = 0$) l'équilibre $\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$ soit LAS càd $tr(J) < 0$ et $det(J) > 0$

② On cherche des fréquences n t.q. $\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$ soit déstabilisé par ces fréquences càd que on cherche n t.q.

ⓐ $tr(J+\lambda_n D) > 0$

ou ⓑ $tr(J+\lambda_n D) < 0$ et $det(J+\lambda_n D) < 0$

$\omega_n(x) = \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$

Question : existe-t-il des critères pour obtenir des structures de Turing ?

oui. Il existe une condition nécessaire pour avoir des structures de Turing

C'est ce qu'on appelle la :

RÈGLE DES SIGNES DE TURING :

Il faut que la matrice Jacobienne aient les coefficients diagonaux de signes opposés :

$$\begin{pmatrix} + & - \\ + & - \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} - & + \\ - & + \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} + & + \\ - & - \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} - & - \\ + & + \end{pmatrix}$$

Preuve : en exercice.

Interprétation :
$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial u} f(u_0, v_0) & \frac{\partial f}{\partial v}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial}{\partial u} g(u_0, v_0) & \frac{\partial}{\partial v} g(u_0, v_0) \end{pmatrix}$$

CAS : $\begin{pmatrix} + & - \\ + & - \end{pmatrix}$ $\quad \frac{\partial f}{\partial u}(u_0, v_0) > 0$ et $\frac{\partial g}{\partial v}(u_0, v_0) < 0$

$$\partial_t \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = J\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + D\Delta\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

$- \left(\frac{\partial f}{\partial u} \quad \frac{\partial f}{\partial v} \right.$

$$\partial_t \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + D \Delta \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = J \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} u = u \cdot \overbrace{\frac{\partial}{\partial u} f}^{>0} + v \cdot \overset{<0}{\frac{\partial f}{\partial v}}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} v = u \cdot \overset{>0}{\frac{\partial}{\partial u} g} + v \overset{<0}{\frac{\partial}{\partial v} g}.$$

$u \longleftarrow v$

$$J \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial u} f & \frac{\partial}{\partial v} f \\ \frac{\partial}{\partial u} g & \frac{\partial}{\partial v} g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \frac{\partial}{\partial u} f + v \frac{\partial f}{\partial v} \\ u \frac{\partial}{\partial u} g + v \frac{\partial}{\partial v} g \end{pmatrix}$$

ce sont de systèmes activateurs-inhibiteurs

$\begin{pmatrix} + & - \\ + & - \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} + & + \\ - & - \end{pmatrix}$ u : activateur , v : inhibiteur

$\begin{pmatrix} - & + \\ - & + \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} - & - \\ + & + \end{pmatrix}$ u : inhibiteur , v activateur

JAMES MURRAY.
MATHEMATICAL
BIOLOGY vol. II

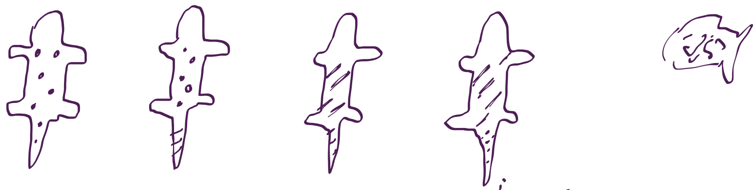
Remarque: Turing a montré que pour un système activateur-inhibiteur si u est l'activateur

si $\frac{d_v}{d_u}$ est "assez grand" et si le domaine Ω est "assez large"

alors l'équilibre $\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$ devient instable par rapport à une fréquence (au moins)

alors l'équilibre $\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$ devient instable par rapport à une fréquence (au moins)
et une structure semble émerger de "$\underbrace{\text{rien}}_{\text{condition initiale qui semble plate}}$"

en 2D



V V V IMPOSSIBLE

Exercice : 1 On considère le système

$$(S)\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = 2u - v + d_u \Delta u \\[2ex] \dfrac{\partial v}{\partial t} = v + \dfrac{1}{2}u + d_v \Delta v \end{cases}$$

(version linéaire de ~~PROIE~~-PRÉDATEUR)
compétition

(S) est-il du type activateur-inhibiteur ?

$$J = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \quad \text{de la forme} \quad \begin{pmatrix} + & - \\ + & + \end{pmatrix}$$

→ NE VÉRIFIE PAS LA RÈGLE DES SIGNES DE TURING

(2) On considère le système

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{u^2}{v} - u + d_u \Delta u \\[2mm] \dfrac{\partial v}{\partial t} = u^2 - 2v + d_v \Delta v \end{cases}$$

MEINHARDT

a. Etudier l'existence des équilibres homogènes

b. Ce système vérifie-t-il la règle des signes de Turing pour chaque équilibre ?

c. Etudier la stabilité de chaque équilibre dans le cas sans diffusion

d. On suppose que $\Omega = [0,\pi]$, C.B. : NEUMANN HOMOGÈNE et $d_u = \frac{1}{10}$

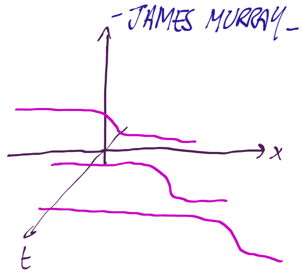
(i) Existe-il des fréquences qui déstabilisent les équilibres si
- $d_v = \frac{1}{10}$
- $d_v = \frac{2}{10}$
- $d_v = \frac{12}{10}$

si oui, les dessiner

(ii) Même question si $\Omega = [0, 2\pi]$ et $\Omega = [0, \frac{\pi}{4}]$.

PARTIE 2 : ondes de propagation

- JAMES MURRAY -

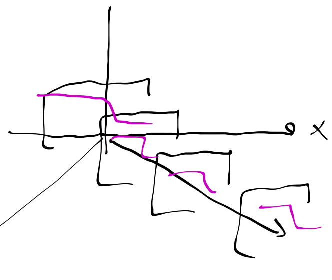


I. Cas d'une seule équation de réaction-diffusion

On considère l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = f(u(t,x)) + d\Delta u(t,x) \quad (E)$$

Définition : Une onde de propagation (ou onde progressive en anglais : TRAVELLING WAVE) pour l'équation (E) est une solution particulière de la forme $u(t,x) = U(x-ct)$ où U est la forme de l'onde et c est sa vitesse



On pose $z = x - ct$ alors $U(x-ct) = U(z)$: forme qui se déplace à la vitesse c sans se déformer

Dans ce cours, on étudie seulement les FRONTS de propagation

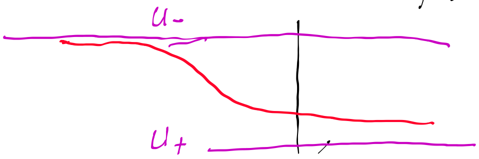
<u>Définition</u> : On suppose

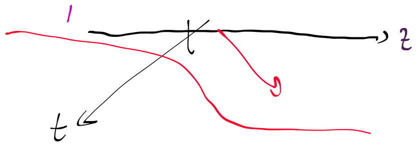
(H_1) : $x \in \mathbb{R}$

(H_2) : f possède au moins 2 équilibres, et on note les extrêmes U_- et U_+ (on conviendra que $U_+ < U_-$)

Alors un front de propagation de (E) avec les hypothèses (H_1) et (H_2) est une onde progressive $U(x-ct)$ telle que $\lim_{z \to -\infty} U(z) = U_-$
$U(z)$

$\lim_{z \to +\infty} U(z) = U_+$



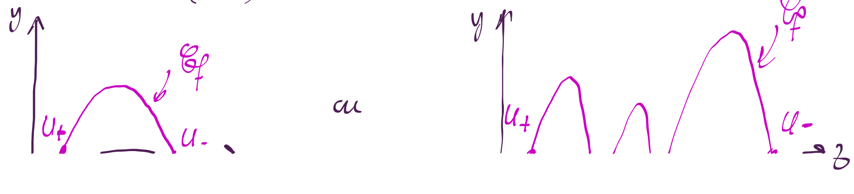


Remarque: un front de propagation décrit la façon dont un equilibre envahit l'autre.

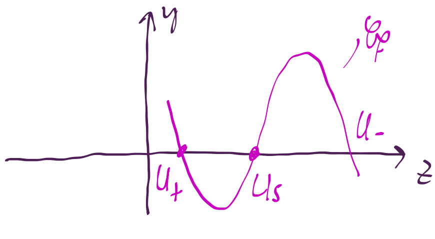
Les resultats concernant l'existence de fronts dépendent de f.

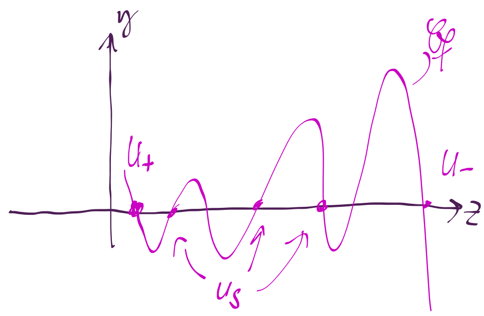
Definition: 1. L'equation (E) avec les hypothèses (H_1) et (H_2) est dite MONOSTABLE si le plus petit equilibre est instable (u_+ instable) et le plus grand (u_-) est L.A.S

Autrement dit $f'(u_-)<0$ et $f'(u_+)>0$



2. L'équation (E) avec les hypothèses (H1) et (H2) est dite BISTABLE si les 2 équilibres u_+ et u_- sont LAS càd $f'(u_-)<0$ et $f'(u_+)<0$
Il y a alors forcément au moins un équilibre u_s entre les 2 qui est instable càd $f'(u_s)>0$





Question : comment trouver la ou les solutions particulières $U(z)$?

$z = x - ct$

$$(E) \quad \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = f(u(t,x)) + d\Delta u(t,x)$$

$\frac{\partial z}{\partial x} = 1 \qquad \frac{dz}{dt} = -c$

$U(z(t,x))$

$\frac{d}{dz} \downarrow$

$\frac{dz}{dt} \downarrow$

$\frac{d}{dz} U(z) =$

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t,x) = \frac{d U(z)}{dz} \cdot \frac{\partial z}{\partial t} = \boxed{-c \cdot U'(z)}$$

- $\frac{\partial}{\partial x} u(t,x) = \frac{d}{dz} U(z) \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = U'(z)$
- $\Delta u(t,x) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t,x) = \frac{d}{dz} U'(z) \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = \boxed{U''(z)}$

Par conséquent résoudre (E) pour $U(z)$ revient à résoudre

$$-cU'(z) = f(U(z)) + d\, U''(z)$$

$\Leftrightarrow \quad d\,U''(z) + cU'(z) = -f(U(z))$ résolution d'une edo d'ordre 2 !!

Résoudre une edo d'ordre 2 $\quad d\,U''(z) + cU'(z) = f(U(z)) \quad d \neq 0$

$) + cU'(z) = f(U(z)) \quad d \neq 0$

On pose $V(z) = U'(z)$

alors $V'(z) = U''(z) = -\frac{c}{d} V(z) - \frac{1}{d} f(U(z))$

on a alors $\begin{cases} U'(z) = V(z) \\ V'(z) = -\frac{c}{d} V(z) - \frac{1}{d} f(U(z)) \end{cases}$

$\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} f_1(U,V) \\ f_2(U,V) \end{pmatrix} \Rightarrow$ Ici ondes progressives $f_1(U,V) = V(z)$!!

10 janvier 2023.

__Exemple:__ L'équation de FISHER-KOLMOGOROV

$(E) \quad \frac{\partial}{\partial t} u = \overbrace{u(1-u)}^{f(u)} + \Delta u.$

u : est une espèce (population)
on cherchera les solutions $u \geq 0$
$(t,x) \in D$

Cherchons au moins un front de propagation.

On pose $z = x - ct$, c constante, on cherche $c \geq 0$.

d'après ce qui précède, on pose $u(t,x) = U(z)$,
l'équation (E) s'écrit $U''(z) + cU'(z) = -f(U(z))$

l'équation (E) s'écrit $U''(z) + cU'(z) = -f(U(z))$

$$\Leftrightarrow \boxed{U''(z) + cU'(z) + U(z)(1-U(z)) = 0} \quad , z \in I \subset \mathbb{R}$$

Pour passer à l'ordre 1, on pose $\begin{cases} V(z) = U'(z) \\ V'(z) = U''(z) = -cU'(z) - U(z)(1-U(z)) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow (S) \begin{cases} U' = V = f_1(U,V) \\ V' = -cV - U(1-U) =: f_2(U,V) \end{cases}$$

<u>équilibres</u> de (S):

Les équilibres (U^*, V^*) de (S) sont nécessairement stationnaires (indep. de z)

donc ici, ils vérifient $U^{*\prime} = 0$ et $V^{*\prime} = 0$

c.à.d. $f_1(U^*, V^*) = 0 \quad \Leftrightarrow V^* = 0$

et $f_2(U^*, V^*) = 0 \quad \Leftrightarrow -cV^* - U^*(1-U^*) = 0$

comme $\underline{V^* = 0} \quad \Rightarrow U^*(1-U^*) = 0$

comme $\underline{V^*=0}$ $\Rightarrow$ $U^*(1-U^*)=0$

$\Leftrightarrow$ $U^*=0$ ou $U^*=1$

On a donc 2 équilibres possibles : $(0,0)$ ou $(1,0)$

<u>Étude des équilibres :</u>

- $\underline{(0,0)}$: on pose $J_{(U,V)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial U}(U,V) & \frac{\partial f_1}{\partial V}(U,V) \\ \frac{\partial f_2}{\partial U}(U,V) & \frac{\partial f_2}{\partial V}(U,V) \end{pmatrix}$

J_l) ... à faire (voir note cours en classe)

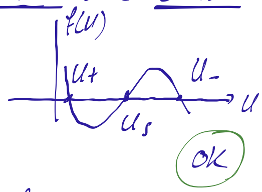
On a la proposition suivante :

<u>Proposition</u> : On considère l'éq. de réaction diffusion $\frac{\partial}{\partial t}u(t,x) = f(u(t,x)) + d\Delta u(t,x)$

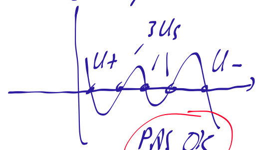
avec les hypothèses (H_1) et (H_2) satisfaites
$x \in \mathbb{R}$ au moins 2 équilibres

alors :

① si l'équation est <u>bistable</u> avec <u>1 seul</u> équilibre u_s compris entre u_+ et u_-



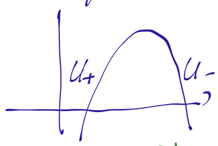
OK



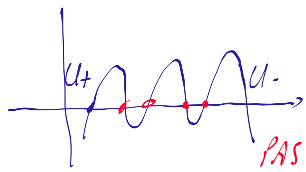
PAS OK

<u>alors</u> on a existence et unicité d'un front d'onde
c-à-d existence d'une seule vitesse c et une seule forme $U(z)$
qui sera <u>monotone</u>, solution de l'équation de réaction diffusion
avec $\lim_{z \to -\infty} U(z) = u_-$ et $\lim_{z \to +\infty} U(z) = u_+$

② Si <u>l'équation est monostable</u> avec aucun équilibre entre u_+ et u_-



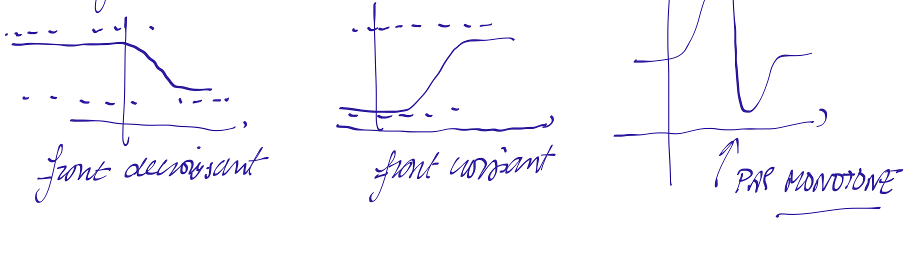
OK



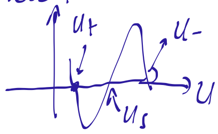
PAS OK

alors il existe une infinité de formes (c'est à dire une infinité de vitesses $c \geq c_0$, où c_0 est une vitesse minimale que l'on peut en général déterminer et qui vérifient $\lim_{z \to +\infty} U(z) = u_+$ et $\lim_{z \to -\infty} U(z) = u_-$

Remarque : attention ce resultat ne concerne que les fronts monotones



Proposition : Si l'équation de réaction diffusion est BISTABLE f(u)



avec un seul équilibre u_s entre u_+ et u_-

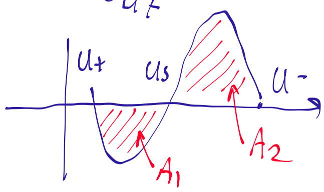
et si on considère un front monotone $U(z)$ avec $\lim\limits_{z\to+\infty} U(z) = +\infty$

et $\lim\limits_{z\to-\infty} U(z) = -\infty$

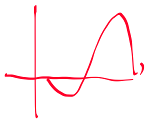
alors • si $\displaystyle\int_{u_+}^{u_-} f(u)\,du < 0$ alors $c<0$ (u_+ "envahit" u_-)

• si $\displaystyle\int_{u_+}^{u_-} f(u)\,du > 0$ alors $c>0$ (u_- " u_+)

Interprétation :

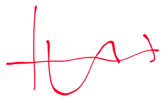


$A_2 > A_1$



$c>0$

$A_2 < A_1$



$c<0$

Preuve : On considère $u'' + c u' + f(u) = 0$ $u(z)$, $z \in \mathbb{R}$

. on multiplie par u' : $u' . u'' + c u'^2 + u' f(u) = 0$

. on intègre entre $-\infty$ et $+\infty$ par rapport à z :

$$\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} u'(z) u''(z) dz}_{\left[\frac{1}{2} u'(z)^2\right]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{1}{2}\left[\underbrace{u'(+\infty)}_{=0} - \underbrace{u'(-\infty)}_{=0}\right]} + c \int_{-\infty}^{+\infty} u'(z)^2 dz + \int_{-\infty}^{+\infty} u'(z) f(u(z)) dz = 0$$

Il nous reste $c \int_{-\infty}^{+\infty} u'(z)^2 dz = - \int_{-\infty}^{+\infty} u'(z) f(u(z)) dz$ $\frac{du}{dz} = u'$ $\Rightarrow du = u' . dz$

$$c . \underbrace{}_{\geq 0} = - \int_{u_-}^{u_+} f(u) du$$

$$c \times (\geq 0) = - \int_{u_-}^{u_+} f(u) du.$$

si $c > 0$ $\Leftrightarrow$ $- \int_{u_-}^{u_+} f(u) du > 0$ $\Leftrightarrow$ $\int_{u_+}^{u_-} f(u) du > 0$

si $c < 0$ $\Leftrightarrow$ $- \dots < 0$ $\Leftrightarrow$ " < 0