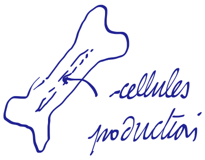
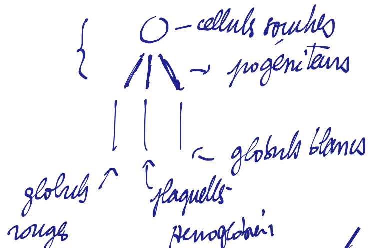
Partie 2 : équations hyperboliques et équations différentielles à retard

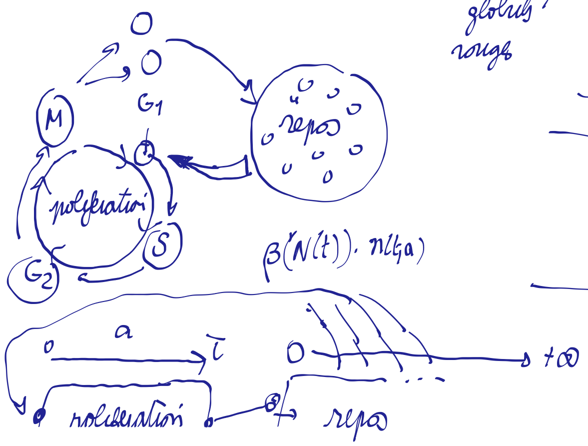
I Comment obtenir une équation à retard à partir d'une équation aux dérivées partielles hyperbolique de type transport

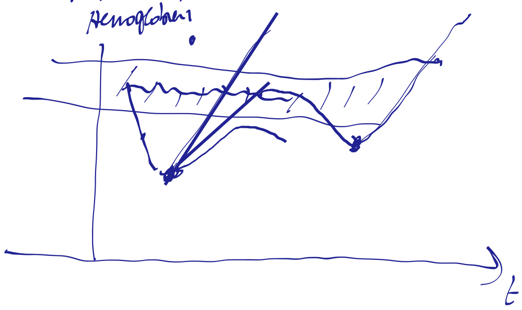
a. Exemple : population de cellules sanguines dans la moelle osseuse

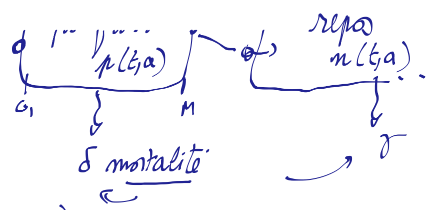


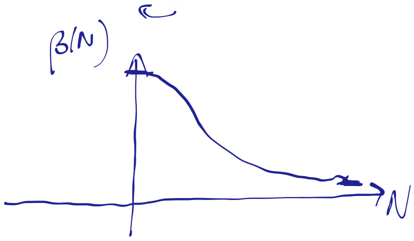
production de sang : hématopoïèse











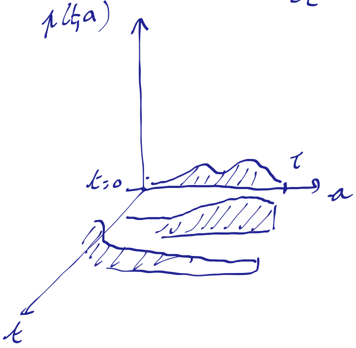
$$\int_0^{+\infty} n(t,a)\,da = N(t)$$ quantité au temps t de cellules au repos

$$\int_0^{\tau} p(t,a)\,da = P(t)$$: quantité de cellules proliférantes

b. Modèle :

① $\frac{\partial}{\partial t} p(t,a) + \frac{\partial}{\partial a} p(t,a) = -\delta p(t,a) \quad t \geq 0 \; , a \in [0,\tau]$

② $\frac{\partial}{\partial t} n(t,a) + \frac{\partial}{\partial a} n(t,a) = -\gamma n(t,a) - \beta(N(t)) . n(t,a) \quad t \geq 0, \; a \in [0,+\infty[$



+ conditions initiales

(c.i1) $p(0,a) = \varphi(a) \quad , \quad a \in [0,\tau]$

(ci2) $n(0,a) = \psi(a) \quad a \in [0,+\infty[$

+ conditions aux bords :

(cb1) $p(t,0) = \int_0^{+\infty} \beta(N(t)) . n(t,a) da = \beta(N(t)) . \int_0^{+\infty} n(t,a) da = \beta(N(t)) . N(t)$

(cb2) $n(t,0) = 2 p(t,\tau)$

+ $\lim_{a \to +\infty} n(t,a) = 0$

c. Comment étudier ce problème ?

(i) Intégrons (1) et (2) par rapport à l'âge

$$(1) \quad \int_0^\tau \frac{\partial}{\partial t} p(t,a)da + \int_0^\tau \frac{\partial}{\partial a} p(t,a)da = -\int_0^\tau \delta p(t,a)da \qquad a \in [0,\tau]$$

on a: $\frac{\partial}{\partial t} \int_0^\tau p(t,a)da + p(t,\tau) - p(t,0) = -\delta \int_0^\tau p(t,a)da$

$\Leftrightarrow \quad \frac{\partial}{\partial t} P(t) + p(t,\tau) - p(t,0) = -\delta P(t)$

$\Leftrightarrow \quad P'(t) + p(t,\tau) - p(t,0) = -\delta P(t)$

$\Leftrightarrow$ (cb1) $\boxed{P'(t) + p(t,\tau) - \beta(N(t)).N(t) = -\delta P(t)}$

$$\frac{\partial}{\partial t} n(t,a) + \frac{\partial}{\partial a} n(t,a) = -(\gamma + \beta(N(t))\, n(t,a)) \qquad a \in [0,+\infty[$$

on intègre entre 0 et $+\infty$ $\quad N'(t) + \underbrace{\lim_{a \to +\infty} n(t,a)}_{=0} - n(t,0) = -(\gamma + \beta(N(t))\, N(t)$

ce qui donne $\boxed{N'(t) - 2p(t,\tau) = -(\gamma + \beta(N(t))\, N(t)}$

d. <u>Comment calculer</u> $p(t,\tau)$?

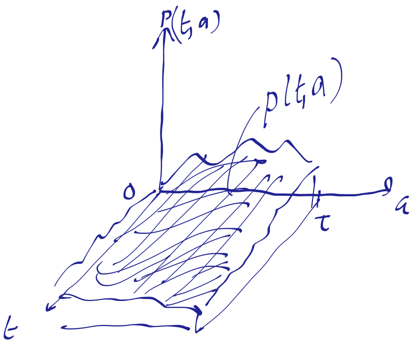
Pour ça, on a besoin que de s'intéresser

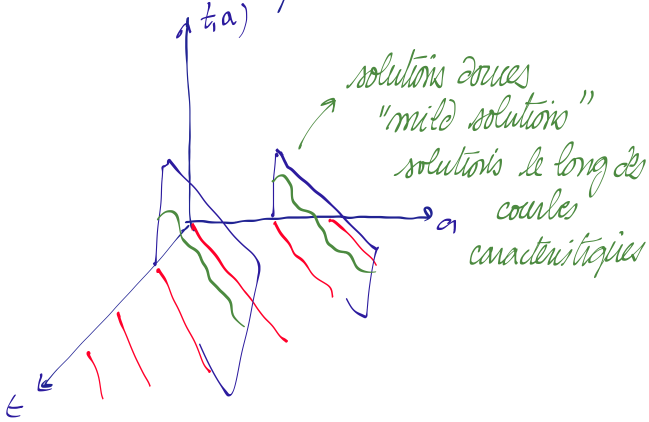
Pour ça, on a besoin que de s'intéresser à l'équation (1)

$$\frac{\partial}{\partial t} p(t,a) + \frac{\partial}{\partial a} p(t,a) = -\delta p(t,a)$$

Remarque: on ne peut en général pas donner la solution exacte d'une telle équation.

Mais on peut la trouver sur des courbes particulières





Méthode des caractéristiques:

$$(1) \qquad \frac{\partial}{\partial t} p(t,a) + 1 \cdot \frac{\partial}{\partial a} p(t,a) = -\delta p(t,a)$$

on suppose que a et t sont <u>liées</u> càd que a dépend de t

on pose $W(t) = p(t, a(t))$

$$W'(t) = \frac{\partial}{\partial t} p(t, a(t)) \cdot \frac{dt}{dt} + \frac{\partial}{\partial a} p(t, a(t)) \cdot \frac{\partial a(t)}{\partial t}$$

$$= \frac{\partial}{\partial t} p(t,a) + a'(t) \frac{\partial}{\partial a} p(t,a)$$

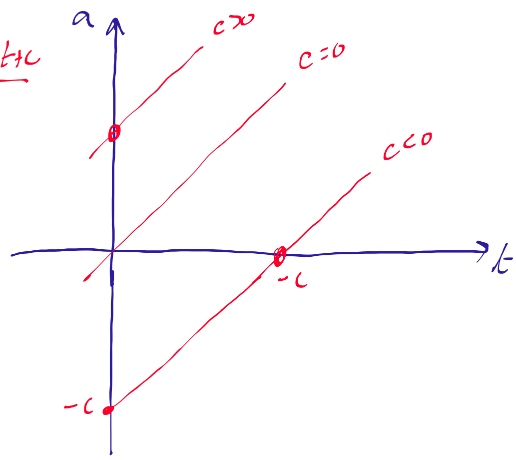
$W(t) = p(t, a(t))$

$\frac{\partial}{\partial t} p \quad \frac{dt}{dt} \qquad \frac{\partial}{\partial a} p \quad \frac{da}{dt}$

on identifie à (1): en imposant $a'(t) = 1$ càd $\boxed{a = t + c}$

dans ce cas on $\boxed{W'(t)} = -\delta p(t,a) = \boxed{-\delta W(t)}$ sur ces courbes

$\underline{a = t+c}$



$a'(t) = 1$

$\Rightarrow a = t + c \ , \ t \geq t_c$

$t_c = \max\{0, -c\}$

$\boxed{\text{CAS } 1}$ $\boxed{\text{si } c>0}$ $\max\{0,-c\} = 0$ donc $t_c = 0$ $\quad a = t + c \ , t \geq 0$

alors $\quad W'(t) = -\delta W(t) \Rightarrow W(t) = W(t_c)\, e^{-\delta(t - t_c)}$

$$= W(0)\, e^{-\delta t}$$

$a = t + c$

$c = a - t$

$$\Rightarrow p(t,a) = p(0,c)\, e^{-\delta t}$$

$a = t + c$

$c = a - t$

$c > 0$

$a - t > 0$

$a > t$

$$p(t,a) = p(0, a-t)\, e^{-\delta t} \quad t \geq 0$$

$$= \varphi(a-t)\, e^{-\delta t} \quad t \geq 0 \rightarrow \text{CAS } a > t \geq 0$$

$\boxed{\text{CAS 2}}$ $\boxed{\text{si } c<0}$ $\max\{0,-c\} = -c$ $t_c = -c$

$c<0$
$a-t<0$
$a<t$

$w(t) = p(t, t+c)$

$w(-c) = p(-c, \underset{\underset{0}{\|}}{-c+c})$

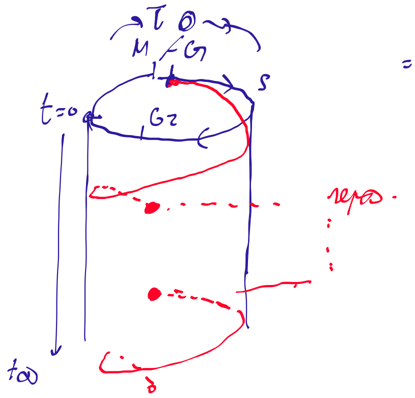
$$W(t) = W(t_c)\, e^{-\delta(t-t_c)}$$

$$= W(-c)\, e^{-\delta(t+c)}$$

$$w(t) = p(t-a, 0)\, e^{-\delta a} \qquad t \geq \cancel{-c} \quad a \leq t$$

$$= \beta(N(t-a)).\,n(t-a)\, e^{-\delta a}$$

$a = t+c$
$-c = t-a$



Pour résumer : si $t < a$ $\quad p(t,a) = \varphi(a-t)\, e^{-\delta t}$

si $t > a$ $\quad p(t,a) = \beta(N(t-a)).N(t-a)\, e^{-\delta a}$

Comme on veut étudier le comportement asymptotique, on considère t "grand" càd $t > a$: et si $a = \tau$ on a :

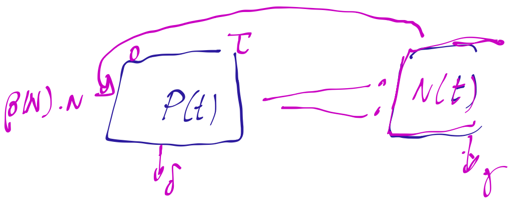
$$t > a \quad p(t,\tau) = \beta(N(t-\tau)).N(t-\tau)\, e^{-\delta\tau}$$

Dans le système ceci donne :

$$\begin{cases} P'(t) + p(t,\tau) - \beta(N(t)).N(t)) = -\delta P(t) \\ N'(t) - 2p(t,\tau) = -(\gamma + \beta(N(t))N(t) \end{cases}$$

$\boxed{t > a}$

$$\begin{cases} P'(t) + \beta(N(t-\tau)).N(t-\tau))e^{-\delta\tau} - \beta(N(t))N(t) = -\delta P(t) \\ \boxed{N'(t) = 2\beta(N(t-\tau)).N(t-\tau)e^{-\delta\tau} - (\gamma + \beta(N(t))\, N(t)} \end{cases}$$



II Equations à retard

Dans cette section on étudiera des équations à retard discret : $x'(t) = f(x(t-T))$

mais on peut avoir plusieurs types d'équations à retard:

tels que : $x'(t) = \int_0^T f(x(t-s))\,ds$ (retard distribué)

$x'(t) = f(x(t-T(x(t))))$ (retard dépendant de l'état)

$x'(t-T) = f(x(t))$ (" de type neutre)

$x'(t) = f(x(t-\infty))$ retard infini

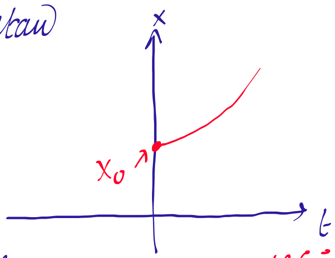
$\vdots$

1. Exemple :

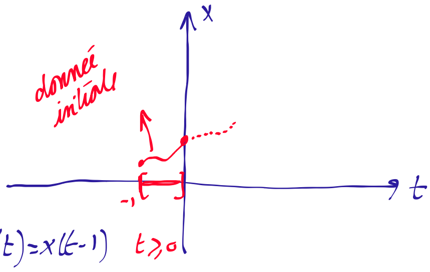
Considérons l'équation à retard

$x'(t) = x(t-1)$

condition initiale ?



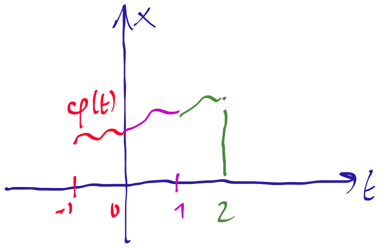
Rappel : $\begin{cases} x'(t) = x(t) \\ x(0) = x(t_0) \end{cases}$ théorème de Cauchy-Lipschitz



$\begin{cases} x'(t) = x(t-1) & t \geq 0 \\ x(t) = \varphi(t) \text{ sur } [-1,0] \end{cases}$ avec φ connue et suffisamment régulière

Comment "construire une solution ?"

Comment "construire une solution ?"



$$\begin{cases} x'(t) = x(t-1) & t \geq 0 \\ x(t) = \varphi(t) & t \in [-1,0] \end{cases}$$

sur $[0,1]$ $x'(t) = x(t-1)$ $t \in [0,1]$ si $t \in [0,1]$ alors $t-1 \in [-1,0]$

$= \varphi(t-1)$ $t-1 \in [-1,0]$

$\Rightarrow$ $x(t) = \int_0^t \varphi(s-1)\,ds = \psi(t)$

sur $t \in [1,2]$ $x'(t) = x(t-1)$ $t \in [1,2]$ càd $t-1 \in [0,1]$

$x'(t) = \psi(t-1)$ "

$x(t) = \int_1^t \psi(s-1)\,ds$

Exercice: On considère le problème suivant:

<u>Exercice:</u> On considère le problème suivant:

$$\begin{cases} x'(t) = x(t-1) & t \geq 0 \\ x(t) = 1 & t \in [-1, 0] \end{cases}$$

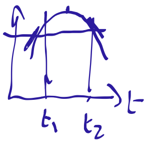
(voir en cours) ou dans le Hal Smith

2. Etude qualitative:

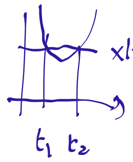
L'objectif en general est d'étudier les equilibres et leur stabilité:

Rappel: $x'(t) = f(x(t))$ edo <u>autonome</u> les solutions sont monotones

par l'absurde:



ou

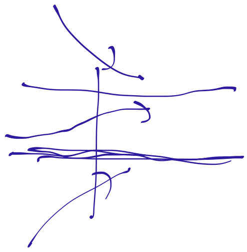


$x'(t_1)\,x'(t_2) < 0$

$f(x(t_1)) \cdot f(x(t_2)) < 0$

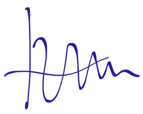
$f(x(t_1))^2 < 0$

1D)



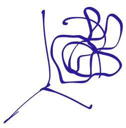
pas d'oscillations

2D)



oscillations possibles mais pas de chaos

3)



chaos possible

Remarque: pour les equations à retard, une seule equation (1D) peut suffir pour avoir des oscillations voire du chaos.

Etude qualitative des edo (une introduction)

a. Equilibres

Les équilibres sont des solutions stationnaires, notées x^*, càd indep. du temps.

Qui verifient $x^{*\prime} = 0$

dans les eq. diff à retard (DDE: delay diff. equations)

on a $x'(t) = f(x(t-T))$

qui devient pour x^*: $x^{*\prime} = f(x^*)$ càd $\boxed{f(x^*) = 0}$

6. Recherche de la stabilité

Exemple : étude de l'éq. diff à retard $x'(t) = a\,x(t-1)$ $t \geq 0$ $a \in \mathbb{R}^*$

· (i) équilibre : ils vérifient $x^{*\prime} = 0$
c-à-d $a x^* = 0$ comme $a \in \mathbb{R}^*$ on a $x^* = 0$ seul équilibre

(ii) stabilité

Méthode : On cherche les équations sous la forme $x(t) = e^{\lambda t}$, $\lambda \in \mathbb{C}$

ce qui donne $x'(t) = a\,x(t-1)$

$\Rightarrow \quad \lambda e^{\lambda t} = a\, e^{\lambda(t-1)}$

$\Leftrightarrow \quad \lambda e^{\lambda t} = a e^{\lambda t} e^{-\lambda}$ pour tout $t \geq 0$

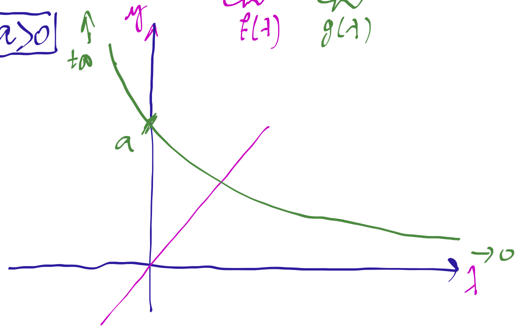
$\Leftrightarrow \quad \lambda = a e^{-\lambda}$

$\Leftrightarrow \quad \boxed{\underbrace{\lambda}_{\text{polynome en } \lambda} - \underbrace{a e^{-\lambda}}_{\text{exponentiel en } \lambda} = 0}$ équation caractéristique de l'éq. à retard.

- <u>Recherche des λ réels</u>

<u>soit $\lambda \in \mathbb{R}$</u> : $\underbrace{\lambda}_{f(\lambda)} = \underbrace{ae^{-\lambda}}_{g(\lambda)}$

$\boxed{a>0}$



on a une seule valeur propre réelle $\lambda > 0$:
donc c'est inutile de chercher les val. props complexes car on sait que si

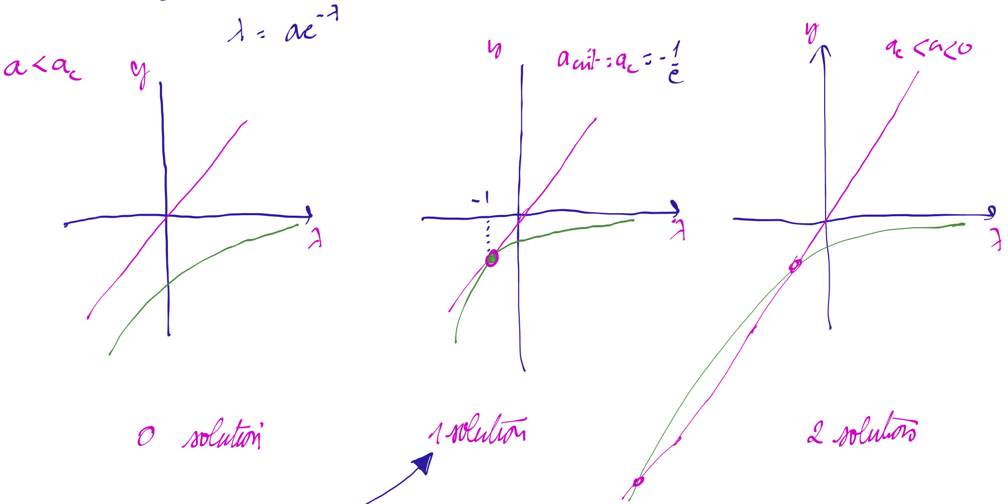
$a>0 \Rightarrow \underset{(\lambda \in \mathbb{R})}{\lambda > 0} \Rightarrow x^*$ INSTABLE

$x(t)\ \sum c_i e^{\lambda_i t}$ | $e^{\alpha_i t} \underbrace{\sum}\ (C_{1i}\cos(\beta t) + C_{2i}\sin(\beta t))$

$= \sum\limits_{\lambda_i \in \mathbb{R}} c_i e^{\lambda_i t} + \underbrace{\sum c_i e^{\lambda_i t}}_{\lambda_i \in \mathbb{C}}$

• CAS $\boxed{a<0}$ $x \in \mathbb{R}$

$x = ae^{-x}$



0 solution 1 solution 2 solutions

CAS 1 solution : $x = a_c e^{-x}$

cherchons a_c et x_c : C_f et C_g sont tangents en 1 point en x_c

càd $\underbrace{f'(x_c)}_{1} = g'(x_c)$

$1 = -a_c e^{-x_c}$

donc $a_c = -e^{x_c}$

D'autre part ce point appartient aux 2 courbes donc :

$f(x_c) = g(x_c)$ avec $a_c = -e^{x_c}$

$x_c = -a_c e^{-x_c}$

$x_c = -e^{+x_c} e^{-x_c} = -1$

Par conséquent $x_c = -1$ et $a_c = -e^{x_c} = -e^{-1} = \boxed{\frac{-1}{e}}$

• Résumons : si $a>0$: une seule valeur propre réelle : x^* INSTABLE

si $a<0$: 3 CAS : • si $-\frac{1}{e}<a<0$: 2 valeurs propres réelles $\lambda_1, \lambda_2 < 0$

• si $a=-\frac{1}{e}$ 1 " " $\lambda_e=-1<0$

• si $a<-\frac{1}{e}$ aucune val. propre réelle

on ne peut pas encore conclure sur la stabilité de x^*

• Recherche des λ complexes

on pose $\lambda=\alpha+i\beta$ et on remplace dans $\lambda=ae^{-\lambda}$

on considère $\boxed{a<0}$ seulement on a alors

$$\alpha+i\beta=a\,e^{-(\alpha+i\beta)}$$
$$\alpha+i\beta=ae^{-\alpha}\,e^{-i\beta}$$
$$\alpha+i\beta=ae^{-\alpha}\,(\cos\beta-i\sin\beta)$$

$$\alpha + i\beta = a e^{-\alpha}(\cos\beta - i\sin\beta)$$

on identifie les parties réelles et imaginaires :

$$\alpha = a e^{-\alpha}\cos\beta \quad (1)$$

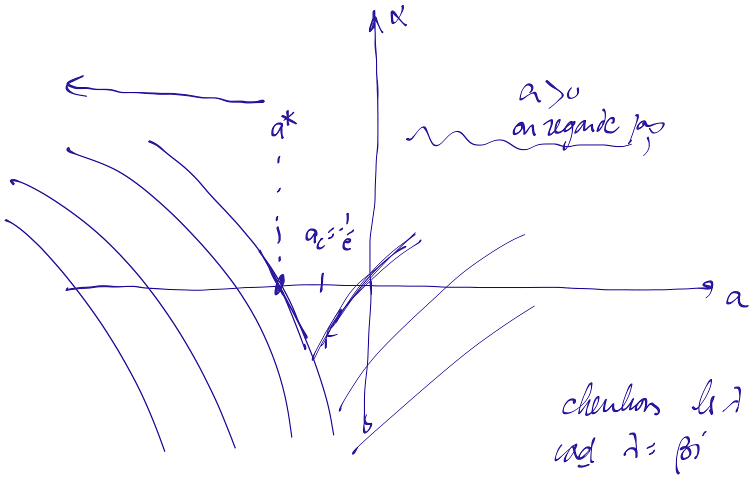
$$\beta = -a e^{-\alpha}\sin\beta \quad (2)$$

ce qui nous intéresse ici est le signe de $Re(\lambda) = \alpha$

$$\frac{(1)}{(2)} : \frac{\alpha}{\beta} = -\frac{\cos\beta}{\sin\beta} = -\mathrm{cotan}(\beta)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = -\beta\,\mathrm{cotan}(\beta) & : \alpha = f_1(\beta) \\ a = \dfrac{-\beta}{\sin\beta} e^{-\beta\,\mathrm{cotan}\,\beta} & a = f_2(\beta) \end{cases}$$

$$(2) \Rightarrow \quad a = \frac{-\beta}{\sin\beta} \cdot e^{\alpha}$$



paramétrée courbe
$y(t) = -t \cotan t$
$x(t) = \frac{-t}{\sin t} e^{-t \cotan t}$
$t \in \mathbb{R}$

cherchons les λ imaginaires purs
càd $\lambda = \beta i$ càd $\alpha = 0$

d'après (1) si $\alpha = 0$ on a $0 = a \cos\beta$ avec $a < 0$
$\Leftrightarrow \cos\beta = 0$
$\Leftrightarrow \beta = \frac{\pi}{2} + k\pi$

(2) $\beta = -a e^{-\alpha} \sin\beta$ $\quad$ $\alpha = 0$

$\beta = -a \sin\beta$ $\quad$ $a < 0$

$\beta = \frac{\pi}{2} + k\pi$

$\frac{\pi}{2} + k\pi = -a \cdot \sin(\frac{\pi}{2} + k\pi)$ $\quad$ $\boxed{a} = \pm\beta = \boxed{\pm\frac{\pi}{2} + k\pi}$

$a^* = -\frac{\pi}{2}$

Conclusion si $a \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[$: x^* sera LAS
x^* sera instable sinon

exercice : $x'(t) = k\, x(t-1)(1 - x(t-1))$

$x \mapsto f(x) = kx(1-x)$
$f'(x) =$
$f'(0) =$
$f'(1) =$

$x'(t) = a x(t-1)$

$x'(t) = \overset{a}{\widetilde{k f'(0)}} x(t-1)$

$x'(t) = k f'(1) x(t-1)$