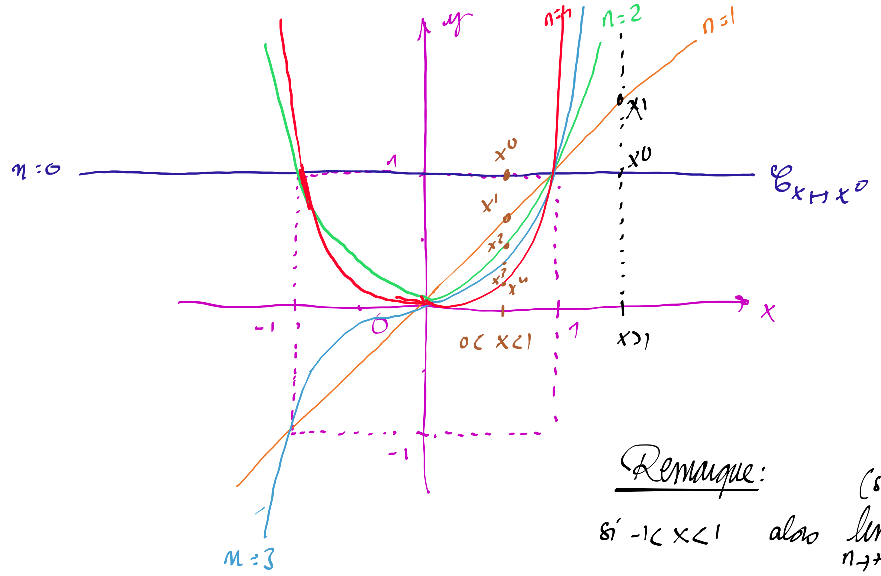


Remarque : (suite : $n \mapsto x^n$)

si $-1 < x < 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} x^n = 0$

si $x = 1$ $\lim\limits_{n \to +\infty} 1^n = 1$

si $x > 1$ $\lim\limits_{n \to +\infty} x^n = +\infty$

si $x = -1$ PAS DE LIMITE

si $x < -1$ " " "

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(x+1)}{x} = ?$$

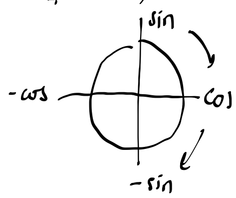
$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

$$\frac{\ln(x+1)}{x} = \frac{\ln(x+1) - \overset{0}{\overset{\shortparallel}{\ln(1)}}}{x - 0} \xrightarrow[x \to 0^+]{} f'(0) = \frac{1}{0+1} = \boxed{1}$$

ici $f : x \mapsto \ln(x+1)$

$$f'(x) = \frac{1}{x+1}$$

Rapel : sin , cos



$$ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$= \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

Que vaut $ch'(x) = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right)$

$$= sh(x)$$

ch

sh

$$sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$= \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$$

$$sh'(x) = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) = ch(x)$$

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$ch^2 x \overset{?}{+} sh^2 x = ?$$

$$-?$$

suite arithmétique

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + a \\ u_0 \text{ donné} \end{cases}$$

$a \in \mathbb{R}$ constante a : RAISON

si $a = 0$ $u_{n+1} = u_n = u_0$ suite stationnaire

$u_0 = u_0$

$u_1 = u_0 + a$

$u_2 = u_1 + a = u_0 + a + a = u_0 + 2a$

$u_3 = u_2 + a = u_0 + 2a + a = u_0 + 3a$

$\vdots$

$u_n \overset{?}{=} u_0 + na$ pour tout $n \in \mathbb{N}$?

pour tout $n \in \mathbb{N}$:

Preuve : par récurrence :

proposition : $\mathcal{P}_n$: " $u_n = u_0 + na$ "

objectif : montrer que $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$

étape 1 : initialisation : $\mathcal{P}_0$ vraie ? $\mathcal{P}_0$: $u_0 = u_0 + 0.a = u_0$ OK

$\mathcal{P}_0$ est donc vraie

cad que $u_k = u_0 + ka$

étape 2 : hérédité On suppose $\mathcal{P}_k$ vraie pour un certain $k \in \mathbb{N}$

montrons que $\mathcal{P}_{k+1}$ est vraie

soit $k \in \mathbb{N}$

On a $u_{k+1} = u_k + a$ par définition de la suite

$= u_0 + ka + a = u_0 + (k+1)a$: $\mathcal{P}_{k+1}$

$\mathcal{P}_k$ vraie

Par conséquent $\mathcal{P}_{k+1}$ est vraie

étape 3 : Conclusion $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$

Que vaut $u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$?

$$u_0 = u_0$$
$$u_1 = u_0 + a$$
$$u_2 = u_0 + 2a$$
$$u_3 = u_0 + 3a$$
$$\vdots$$
$$u_n = u_0 + na$$

$$u_0 + u_1 + \dots + u_n = (n+1)u_0 + a + 2a + 3a + \dots + na$$
$$= (n+1)u_0 + a(1+2+3+\dots+n)$$
$$= (n+1)u_0 + a \cdot \frac{n(n+1)}{2}$$
$$= (n+1)\left(u_0 + \frac{an}{2}\right)$$
$$= (n+1)\left(\frac{2u_0 + an}{2}\right)$$
$$= (n+1)\left(\frac{u_0 + u_0 + an}{2}\right)$$
$$= (n+1)\left(\frac{u_0 + u_n}{2}\right)$$

GAUSS

$$S = 1 + 2 + 3 + \dots + n$$
$$+ \; S = n + (n-1) + (n-2) + \dots + 1$$
$$2S = (n+1) + (n+1) + \dots + (n+1)$$
$$2S = n \cdot (n+1)$$
$$\Rightarrow S = \frac{n(n+1)}{2}$$

Suites géométriques :

$$\begin{cases} u_{n+1} = r u_n \\ u_0 \text{ donné} \end{cases}$$

si $r=0$ $u_n = 0$ pour tout n sauf u_0

si $r=1$ $u_n = u_0$ " " suite stationnaire

si $r \neq 0$, et $\boxed{r \neq 1}$

u_0

$u_1 = r u_0$

$u_2 = r u_1 = r.r.u_0 = r^2 u_0$

$u_3 = r.u_2 = r.r^2 u_0 = r^3 u_0$

$\vdots$

$u_n = r^n u_0$

Que vaut $u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$

$u_0 = u_0$

$+ u_1 = r u_0$

$+ u_2 = r^2 u_0$

$+ u_3 = r^3 u_0$

$\vdots$

$+ u_n = r^n u_0$

$u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n = u_0 + r u_0 + r^2 u_0 + r^3 u_0 + \dots + r^n u_0$

$= u_0 \left(1 + r + r^2 + r^3 + .. + r^n \right)$

Que vaut $1 + r + r^2 + \dots + r^n$?

ASTUCE : $\left(1 + r + r^2 + .. + r^n\right)(1 - r)$

$= 1 + r + r^2 + .. + r^n$
$\quad - r - r^2 \dots - r^n - r^{n+1}$

$= 1 - r^{n+1}$

donc $\left(1 + r + r^2 + .. + r^n\right)(1 - r) = 1 - r^{n+1}$

si $r \neq 1$: $1 + r + \dots + r^n = \dfrac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$

donc $u_0 + u_1 + .. + u_n = u_0 \cdot \dfrac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$

suite arithmético geometrique.

$$\begin{cases} u_{n+1} = r u_n + a \\ u_0 \text{ donné} \end{cases}$$

$a \neq 0$ si $a = 0 \to$ suite geometrique

$r \neq 1$ si $r = 1 \to$ " arithmetique

On suppose $a \neq 0$ et $r \neq 1$

étape 1 : on pose f l'application : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto rx + a$

On cherche ℓ tel que $f(\ell) = \ell$ (point fixe)

$$r\ell + a = \ell \iff \ell - r\ell = a$$
$$\iff \ell(1-r) = a$$
$$\iff \ell = \frac{a}{1-r} \quad \text{car } r \neq 1$$

étape 2 : On pose $\boxed{v_n = u_n - \ell}$ $v_0 = u_0 - \ell$

$\Rightarrow u_n = v_n + \ell$

$$v_{n+1} = u_{n+1} - \ell$$
$$v_{n+1} = r u_n + a - \ell$$
$$v_{n+1} = r.(v_n + \ell) + a - \ell$$
$$= r.v_n + r\ell + a - \ell$$
$$= r v_n + r.\frac{a}{1-r} + a - \frac{a}{1-r}$$
$$= r v_n + \frac{a}{1-r}(r-1) + a$$
$$\boxed{v_{n+1}} = r v_n - a + a = \boxed{r v_n}$$

donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison r

et de premier terme $v_0 = u_0 - \ell$

donc $v_n = r^n . v_0 = r^n (u_0 - \ell)$

or par définition $v_n = u_n - \ell$ $\Big\}$ donc $u_n - \ell = r^n(u_0 - \ell)$

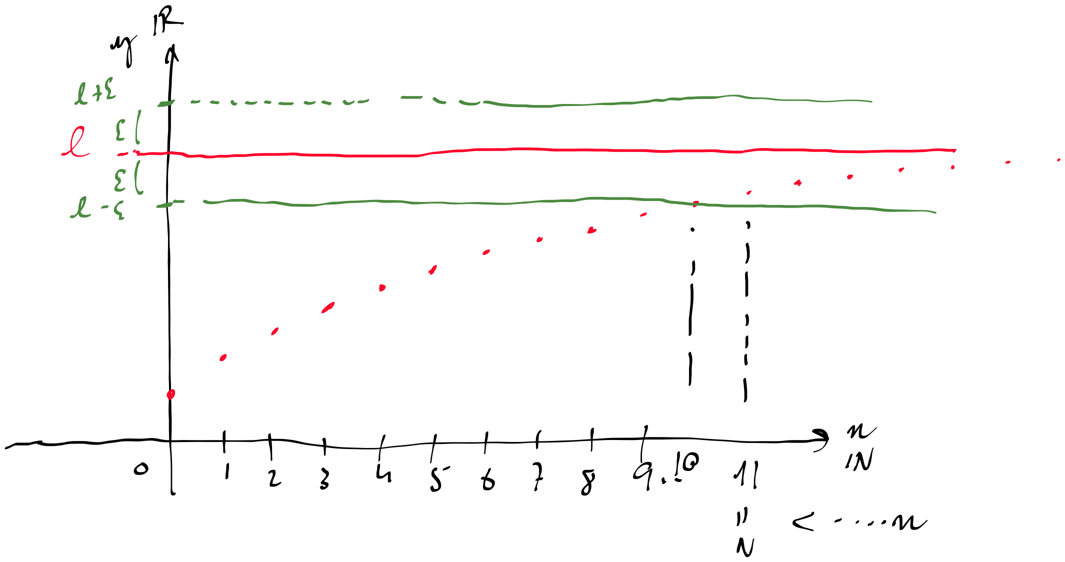
$\Rightarrow u_n = r^n (u_0 - \ell) + \ell$

$$u_n \underset{\ell = \frac{a}{1-r}}{=} r^n \left(u_0 - \frac{a}{1-r}\right) + \frac{a}{1-r}$$

limite d'une suite

Limite d'une suite

On suppose que $\lim_{n \to +\infty} u_n = \ell$



pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ t q

pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $n \geq N$ alors $\ell - \varepsilon \leq u_n \leq \ell + \varepsilon$

$\Leftrightarrow \quad -\varepsilon \leq u_n - \ell \leq \varepsilon$

$\Leftrightarrow \quad |u_n - \ell| \leq \varepsilon$