Université Claude Bernard, Lyon 1
43, boulevard du 11 novembre 1918
69622 Villeurbanne cedex, France

Licence Sciences & Technologies
Spécialité : Mathématiques
UE : EDO/EDP Printemps 2014

Contrôle Final Ecrit - EDO/EDP Printemps 2014
5 juin 2014

Avant propos.

La durée de l'examen est de 3h. Aucun document et aucune calculatrice ne sont autorisés durant l'épreuve. L'usage des téléphones portables est prohibé. La répartition en durée de chacun des exercices n'est qu'à titre indicatif. La justification des réponses et un soin particulier de la présentation seront demandés et pris en compte lors de la notation.

Questions de cours (20 minutes) (3 points)

1. On considère deux matrices A et $E \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ définies par

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad E = \begin{pmatrix} \epsilon_1 & \epsilon_2 \\ \epsilon_3 & \epsilon_4 \end{pmatrix},$$

   où les ϵ_i, $i = 1, ..., 4$ sont supposés "petits" de telle sorte que la matrice $B = A + E$ soit vue comme une "petite" perturbation de A. On considère le système

$$(E_1) \quad X'(t) = AX(t),$$

   pour $t \in \mathbb{R}$ et X définie sur I à valeurs dans $\mathbb{R}^2$.

   (a) Donner le type et la nature de l'équilibre de (E_1) dans les cas suivants (justifier) :

      i. $\det(A) < 0$, $\text{tra}(A) < 0$ (où $\det(A)$ est le déterminant de A et $\text{tra}(A)$ est sa trace).

      ii. $\det(A) > 0$, $\text{tra}(A) = 0$.

      iii. $\det(A) = 0$, $\text{tra}(A) > 0$.

   (b) Parmi les 3 cas précédents, trouver quels sont les équilibres hyperboliques et ceux qui sont non-hyperboliques (justifier).

   (c) Que peut-on dire de la nature et du type de l'équilibre du système

$$(E_2) \quad Y'(t) = BY(t),$$

   pour $t \in \mathbb{R}$ et Y définie sur I à valeurs dans $\mathbb{R}^2$, pour les trois cas de la question précédente ? Justifier.

2. Enoncer les conditions de stabilité linéaire d'un équilibre pour un système non-linéaire autonome de dimension n de la forme

$$X'(t) = F(X(t)), t \in I \subset \mathbb{R},$$

   où X est définie sur I à valeur dans $\mathbb{R}^n$, et F est une application de classe $\mathscr{C}^1$ définie sur $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

Exercice 1 (60 minutes) (6 points)

On considère les deux systèmes linéaires suivants :

$$(S_1)\ \begin{cases} \dot{x} = x + y, \\ \dot{y} = 4x - 2y, \end{cases} \quad \text{et} \quad (S_2)\ \begin{cases} \dot{x} = -x + 3y, \\ \dot{y} = -3x + 5y, \end{cases}$$

où x et y sont définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Pour chacun des deux systèmes,

1. Réécrire le système sous la forme
$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = A_i \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$
2. Réduire la matrice A_i, *i.e.* déterminer des matrices B_i et P_i telles que
$$A_i = P_i B_i P_i^{-1},$$
et B_i soit une matrice diagonale ou un bloc de Jordan.
3. Résoudre le système
$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = B_i \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$
4. Tracer (avec soin) les orbites représentant les solutions dans le plan (u, v).
5. En déduire les solutions générales (x, y) pour des conditions initiales quelconques dans la base initiale.
6. BONUS (+2 points) : tracer (avec soin) le portrait de phase des solutions dans le repère initial.

Exercice 2 (20 minutes) (3 points)

On considère le système linéaire suivant :

$$(S_4)\ \begin{cases} \dot{x} = y\ , \\ \dot{y} = -2y + z, \\ \dot{z} = -Kx - z, \end{cases}$$

où x, y et z sont définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et K est un nombre réel.

1. Donner le polynôme caractéristique permettant de trouver les valeurs propres de ce système en fonctions de K.
2. D'après un critère évoqué en cours que l'on rappellera, donner les conditions sur K pour que l'équilibre soit asymptotiquement stable.

Exercice 3 (50 minutes) (6 points)

On considère le système dynamique non linéaire suivant

$$(S_5) \quad \begin{cases} \dot{x} &= \quad x\,(1-(x^2+y^2))+y, \\ \dot{y} &= -x+y\,(1-(x^2+y^2)). \end{cases}$$

1. Montrer que le système (S_5) admet $(0,0)$ comme unique équilibre.
2. Etudier la stabilité et le type de cet équilibre.
3. On s'intéresse maintenant au problème de Cauchy pour (S_5) :

   $$\begin{cases} \dot{x} &= \quad x\,(1-(x^2+y^2))+y, \quad x(0) = x_0, \\ \dot{y} &= -x+y\,(1-(x^2+y^2)), \quad y(0) = y_0. \end{cases}$$

   On fixe $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$. Justifier l'existence d'une unique solution maximale (x,y) au problème de Cauchy ci-dessus, définie sur un intervalle ouvert J.
4. Montrer que si $(x_0,y_0) \neq (0,0)$ alors pour tout $t \in J$, $(x(t),y(t)) \neq (0,0)$.
5. On suppose désormais $(x_0,y_0) \neq (0,0)$. On définit

   $$r(t) = \sqrt{x(t)^2+y(t)^2}, \text{ pour tout } t \in J.$$

   Montrer que r est solution de l'équation différentielle

   $$\begin{cases} \dot{r} &= r(1-r^2), \\ r(0) &= r_0 = \sqrt{x_0^2+y_0^2}. \end{cases} \tag{1}$$

6. En séparant les cas $r_0 = 1$, $r_0 \in]0,1[$, et $r_0 > 1$, étudier le comportement qualitatif de la solution de (1). *On justifiera en particulier que r est définie jusqu'en $+\infty$, on étudiera sa monotonie, et sa limite quand $t \to +\infty$.*
7. En déduire que J contient $[0,+\infty[$ et que $\lim_{t\to+\infty} x(t)^2+y(t)^2 = 1$.
8. Pour compléter l'étude, on écrit la solution en coordonnées polaires : pour tout $t \in J$,

   $$x(t) = r(t)\cos(\theta(t)),\ y(t) = r(t)\sin(\theta(t)),$$

   où $\theta : J \to \mathbb{R}$. On suppose ici que θ dérivable sur J. Montrer que pour tout $t \in J$,

   $$\dot{\theta} = -1$$

9. Décrire le comportement des solutions de (S_5) quand $t \to +\infty$ suivant les valeurs de (x_0,y_0). Dessiner quelques orbites représentatives dans le plan de phase (x,y).
10. (BONUS : +2 points) Répondre à la question 9. pour le système qui s'écrirait en coordonnées polaires de la façon suivante :

    $$(S_6) \quad \begin{cases} \dot{r} &= r(1-r)(r-2), \\ \dot{\theta} &= 1, \end{cases}$$

    en considérant toutefois les cas $r_0 = 0, 1$ et 2 ainsi que les cas où $r_0 \in]0,1[,]1,2[$ et $]2,+\infty[$.

Exercice 4 (30 minutes) (5 points)

Soient $m \in \mathbb{N}$ et $\mathcal{A} \in \mathscr{C}(\mathbb{R}; \mathscr{M}_m(\mathbb{R}))$. On note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un produit scalaire sur $\mathbb{R}^m$, $\| \cdot \|$ sa norme associée (*i.e.* $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$) et $|||.|||$ la norme sur $\mathscr{M}_m(\mathbb{R}))$ subordonnée à $\|.\|$.

1. Montrer que pour toutes solutions Y, Z de

$$(E_2) \quad Y'(t) = \mathcal{A}(t)Y(t),$$

et pour tout $t_0, t \in \mathbb{R}$ avec $t \geq t_0$, on a,

$$\|Y(t) - Z(t)\| \leq \|Y(t_0) - Z(t_0)\| \exp\left(\int_{t_0}^{t} |||\mathcal{A}(s)|||ds\right).$$

2. On suppose que pour tout $t \in \mathbb{R}$, et pour tout $v \in \mathbb{R}^m$,

$$\langle \mathcal{A}(t)v, v \rangle \leq 0.$$

Montrer que pour toute solution Y de (E_2), l'application $t \mapsto \|Y(t)\|^2$ est décroissante sur $\mathbb{R}$.

3. On suppose à présent $A \in \mathscr{M}_m(\mathbb{R})$ (matrice à coefficients constants réels). Déduire de la question précédente que

$$\forall v \in \mathbb{R}^m, \ \langle Av, v \rangle \leq 0 \text{ si et seulement si pour tout } t \in \mathbb{R}_+, \ |||e^{tA}||| \leq 1.$$

4. En déduire que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on a

$$\forall v \in \mathbb{R}^m, \ \langle Av, v \rangle \leq \alpha \|v\|^2 \text{ si et seulement si pour tout } t \in \mathbb{R}_+, \ |||e^{tA}||| \leq e^{t\alpha}.$$