Université Claude Bernard Lyon 1
43, boulevard du 11 novembre 1918
69622 Villeurbanne cedex, France

Licence Sciences & Technologies
Spécialité : Mathématiques
UE : EDO/EDP Printemps 2015

Contrôle Final Ecrit - Equations Différentielles
4 juin 2015

Avant propos.

La durée de l'examen est de 3h. Aucun document et aucune calculatrice ne sont autorisés durant l'épreuve. L'usage des téléphones est prohibé. La répartition en durée de chacun des exercices, et le barème (sur 40 points) ne sont donnés qu'à titre indicatif. La justification des réponses et un soin particulier de la présentation seront demandés et pris en compte lors de la notation.

Questions de cours (30 minutes) (8 points)

1. (4 points) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. On considère le système différentiel suivant :

$$(\mathscr{S}_1) \quad \begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} &= f(x_1(t), x_2(t)), \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} &= g(x_1(t), x_2(t)). \end{cases}$$

   On suppose que ce système admet un équilibre noté $(x_1^*, x_2^*) \in \mathbb{R}^2$. On note A la matrice suivante

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^*, x_2^*) & \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1^*, x_2^*) \\ \frac{\partial g}{\partial x_1}(x_1^*, x_2^*) & \frac{\partial g}{\partial x_2}(x_1^*, x_2^*) \end{pmatrix}.$$

   (a) Ecrire le système linéarisé de $(\mathscr{S}_1)$ autour de l'équilibre (x_1^*, x_2^*), et expliquer comment on l'obtient.

   (b) Enoncer sans les démontrer les propriétés liant les valeurs propres de la matrice A et la stabilité de l'équilibre (x_1^*, x_2^*) pour le système $(\mathscr{S}_1)$.

2. (4 points) Soit α et β deux paramètres réels, soit A la matrice carrée définie par

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix},$$

   On considère le système différentiel linéaire suivant

$$(\mathscr{S}_2) \quad X'(t) = AX(t).$$

   On s'intéresse à la stabilité et au type de l'équilibre $0_{\mathbb{R}^2} = (0,0)^T$ pour le système $(\mathscr{S}_2)$, quand $t \to +\infty$. Donner un exemple de valeur de (α, β) pour laquelle $0_{\mathbb{R}^2}$ est

   (a) un nœud stable,

   (b) un foyer stable,

   (c) un foyer instable,

   (d) un centre.

Exercice 1 (40 minutes) (8 points)

1. On considère le système différentiel suivant

$$(\mathscr{S}_3) \quad \left\{ \begin{array}{rcrcr} x'(t) & = & -2x(t) & + & y(t) \\ y'(t) & = & -x(t) & & \end{array} \right. , \quad t \in \mathbb{R}.$$

   (a) Déterminer toutes les solutions de $(\mathscr{S}_3)$.

   (b) Etudier le comportement de ces solutions quand $t \to +\infty$.

   (c) Déterminer la solution de $(\mathscr{S}_3)$ vérifiant $x(0) = 1$, $y(0) = -1$.

2. Déterminer la solution du problème de Cauchy suivant :

$$(\mathscr{C}_3) \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrrl} x'(t) & = & -2x(t) & + & y(t), & x(0) & = 1, \\ y'(t) & = & -x(t) & + & t, & y(0) & = -1. \end{array} \right.$$

Exercice 2 (40 minutes) (8 points)

On considère le système non linéaire suivant

$$(\mathscr{S}_4) \quad \left\{ \begin{array}{rcrcr} x'(t) & = & x(t) & - & y(t) \\ y'(t) & = & x(t)^2 & - & 4 \end{array} \right. , \quad t \in \mathbb{R}.$$

1. Montrer que pour tout $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, le problème de Cauchy

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrl} x'(t) & = & x(t) & - & y(t), & x(0) = x_0, \\ y'(t) & = & x(t)^2 & - & 4, & y(0) = y_0. \end{array} \right.$$

   admet une unique solution maximale, définie sur un intervalle ouvert I.

2. Montrer que le système $(\mathscr{S}_4)$ admet exactement deux équilibres, que l'on déterminera.
3. Etudier la stabilité de ces deux équilibres. Donner leur type.
4. *Esquisse du portrait de phase.* Faire figurer les éléments suivants sur une ébauche de portrait de phase pour le système $(\mathscr{S}_4)$:

   (a) les deux points d'équilibres,

   (b) les courbes le long desquelles le champ de vecteur est horizontal ou vertical,

   (c) quelques flèches représentant le champ de vecteur dans les zones délimitées par les courbes précédentes,

   (d) quelques orbites, au voisinage des points d'équilibre,

   (e) dans le cas d'un point selle, indiquer les directions remarquables au voisinage du point *(déterminer pour cela les vecteurs propres de la matrice jacobienne en ce point d'équilibre).*

Exercice 3 (1 heure 10) (16 points)

On considère l'équation différentielle suivante

$$(\mathscr{E}_5) \quad y''(t) + y(t)^3 = 0.$$

1. Montrer que si y est solution de $(\mathscr{E}_5)$ sur un intervalle I, alors $-y$ est aussi solution de $(\mathscr{E}_5)$ sur I.

2. Mettre $(\mathscr{E}_5)$ sous la forme d'un système différentiel non linéaire $X'(t) = f(X(t))$ où $X = (y, y')^T$ et $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est une fonction que l'on déterminera.
3. Soit $(y_0, y_0') \in \mathbb{R}^2$. Montrer qu'il existe une unique solution maximale X, définie sur un intervalle ouvert J, au problème de Cauchy :

$$X'(t) = f(X(t)), \quad X(0) = (y_0, y_0')^T.$$

4. On considère maintenant le problème de Cauchy associé à $(\mathscr{E}_5)$:

$$(\mathscr{C}_5) \;\; y''(t) + y(t)^3 = 0, \quad y(0) = y_0, \; y'(0) = y_0'.$$

   Montrer qu'il existe une unique solution maximale y au problème de Cauchy $(\mathscr{C}_5)$, définie sur l'intervalle ouvert J.
5. On définit la fonction $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par $H(x_1, x_2) = \dfrac{1}{4}(x_1)^4 + \dfrac{1}{2}(x_2)^2$. Montrer que pour tout $t \in J$,

$$H(y(t), y'(t)) = H(y_0, y_0').$$

6. En déduire que y et y' sont bornées sur J.
7. En déduire que toute solution de $X'(t) = f(X(t))$ (et donc toute solution de $(\mathscr{E}_5)$) est globale.

Dans toute la suite de l'exercice, on fixe $(y_0, y_0') \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et on considère y la solution du problème de Cauchy $(\mathscr{C}_5)$ correspondante.

8. Montrer que si y s'annule en $t_0 \in \mathbb{R}$, alors $y'(t_0) \neq 0$. En déduire que si $y(t_0) = 0$, alors il existe un intervalle ouvert I_{t_0} contenant t_0 tel que $y(t) \neq 0$ pour tout t dans $I_{t_0} \setminus \{t_0\}$. *Ainsi les zéros de y sont isolés.*
9. Le but de cette question est de montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$, y admet un zéro dans l'intervalle $[a, +\infty[$. Pour cela, on raisonne par contradiction en supposant que $y(t) \neq 0$ pour tout $t \in [a, +\infty[$.
   (a) Expliquer pourquoi, sans perte de généralité, on peut supposer que $y(t) > 0$ pour tout $t \in [a, +\infty[$.
   (b) Montrer que y' est alors strictement décroissante sur $[a, +\infty[$. En déduire qu'elle admet une limite finie y'_∞ lorsque t tend vers $+\infty$.
   (c) Montrer que y admet également une limite finie lorsque t tend vers $+\infty$.
   (d) En déduire que $y'_\infty = 0$. Quel est le signe de y' sur $[a, +\infty[$?
   (e) Montrer que $y'(t) \leq y'(a) - y(a)^3(t - a)$ pour tout $t \in [a, +\infty[$.
   (f) Conclure en soulevant une contradiction.
10. Les questions 8. et 9. ont permis de montrer qu'il existe une suite strictement croissante et tendant vers $+\infty$ de zéros de y. Soient $t_0 < t_1 < t_2$ trois zéros consécutifs de y. On suppose que $y'(t_0) > 0$. Quel est le signe de y' en t_1 ? En t_2 ? Mêmes questions si $y'(t_0) < 0$.
11. Montrer que $y'(t_2) = y'(t_0)$. *On pourra utiliser la fonction H.*
12. Soit $T = t_2 - t_0$. Montrer que la fonction y est T-périodique.

Université Claude Bernard Lyon 1
43, boulevard du 11 novembre 1918
69622 Villeurbanne cedex, France

Licence Sciences & Technologies
Spécialité : Mathématiques
UE : EDO/EDP Printemps 2015

Contrôle Final Ecrit - Equations Différentielles
4 juin 2015
Corrigé

Questions de cours

1. (a) Notons $X = (x_1, x_2)^T$, $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $F(X) = (f(X), g(X))^T$, et $X^* = (x_1^*, x_2^*)^T$. Alors, par définition d'un équilibre, on a $F(X^*) = 0$. De plus, F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ donc par la formule de Taylor-Young, on a pour tout $X \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} F(X) &= F(X^*) + DF(X^*)(X - X^*) + g(X - X^*) \\ &= A(X - X^*) + g(X - X^*), \text{ avec } g(X - X^*) = \underset{X \to X^*}{o}(\|X - X^*\|). \end{aligned}$$

Ainsi, si X est solution de $(\mathscr{S}_1)$ sur un intervalle I, en notant $Y : t \mapsto X(t) - X^*$, on a, pour tout $t \in I$,

$$Y'(t) = AY(t) + g(Y(t)).$$

Le système linéarisé au voisinage de l'équilibre X^* s'obtient en négligeant le reste du développement de Taylor précédent, il s'écrit

$$Y'(t) = AY(t).$$

(b) Notons λ_1 et λ_2 les valeurs propres de A (dans $\mathbb{C}$). On a les deux résultats suivants :
- Si $\mathcal{R}e\,\lambda_1 < 0$ et $\mathcal{R}e\,\lambda_2 < 0$, alors l'équilibre (x_1^*, x_2^*) est asymptotiquement stable pour le système $(\mathscr{S}_1)$.
- Si $\mathcal{R}e\,\lambda_1 > 0$ ou $\mathcal{R}e\,\lambda_2 > 0$, alors l'équilibre (x_1^*, x_2^*) est instable pour le système $(\mathscr{S}_1)$.

Si $\mathcal{R}e\,\lambda_1 \leq 0$ et $\mathcal{R}e\,\lambda_2 = 0$ (ou $\mathcal{R}e\,\lambda_2 \leq 0$ et $\mathcal{R}e\,\lambda_1 = 0$), on ne sait pas conclure quant à la stabilité de (x_1^*, x_2^*) pour le système $(\mathscr{S}_1)$.

2. (a) Pour $\alpha = -1$ et $\beta = 0$, $A = -I_2$, $0_{\mathbb{R}^2}$ est un noeud stable pour $(\mathscr{S}_2)$.

(b) Pour $\alpha = -1$ et $\beta = 1$, $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, les valeurs propres de A sont $-1+i$ et $-1-i$. Elles ont une partie imaginaire non nulle et une partie réelle strictement négative donc $0_{\mathbb{R}^2}$ est un foyer stable.

(c) Pour $\alpha = 1$ et $\beta = 1$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, les valeurs propres de A sont $1 + i$ et $1 - i$. Elles ont une partie imaginaire non nulle et une partie réelle strictement positive donc $0_{\mathbb{R}^2}$ est un foyer instable,

(d) Pour $\alpha = 0$ et $\beta = 1$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, les valeurs propres de A sont i et $-i$. Elles sont purement imaginaires donc $0_{\mathbb{R}^2}$ est un centre.

Exercice 1 (40 minutes) (8 points)

1. (a) Notons $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Son polynôme caratéristique est $P_A(\lambda) = (\lambda+1)^2$. Cette matrice a donc une valeur propre double, égale à -1.
   On cherche le noyau de $A + I_2$. On obtient facilement qu'il est de dimension 1 et engendré par le vecteur $v_1 = (1,1)^T$.
   On cherche maintenant $v_2 \in \mathbb{R}^2$ tel que $Av_2 = -v_2 + v_1$ (réduction de A sous la forme d'un bloc de Jordan). On obtient facilement que $v_2 = (1,2)^T$ convient.
   On note $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Alors $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, et on a
   $$A = P \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1}.$$
   Notons $J = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Alors
   $$e^{tA} = Pe^{tJ}P^{-1} = P \begin{pmatrix} e^{-t} & te^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} (1-t)e^{-t} & te^{-t} \\ -te^{-t} & (1+t)e^{-t} \end{pmatrix}.$$
   Les solutions de $(\mathscr{S}_3)$ sont données par : pour tout $t \in \mathbb{R}$,
   $$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{tA} \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-t)e^{-t}x(0) + te^{-t}y(0) \\ -te^{-t}x(0) + (1+t)e^{-t}y(0) \end{pmatrix}.$$
   (b) Par croissances comparées, on obtient pour toute donnée initiale $(x(0), y(0))$, le comportement suivant :
   $$\lim_{t\to+\infty} x(t) = 0, \quad \lim_{t\to+\infty} y(t) = 0.$$
   (c) Avec $x(0) = 1$, $y(0) = -1$, on obtient la solution suivante : pour tout $t \in \mathbb{R}$,
   $$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-2t)e^{-t} \\ -(1+2t)e^{-t} \end{pmatrix}.$$
2. On s'intéresse maintenant à une équation non homogène. On connaît déjà les solutions de l'équation homogène, il reste à trouver une solution particulière. La méthode la plus rapide, au vu du second membre, est de la trouver à la main (sinon on peut utiliser la formule de Duhamel, ou la variation de la constante). L'équation est de la forme
   $$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix},$$
   on cherche donc une solution dont les composantes sont des polynômes de degré 1 :
   $$\begin{pmatrix} x_p(t) \\ y_p(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} at+b \\ ct+d \end{pmatrix}.$$
   On injecte dans l'équation, et on obtient $a = 1$, $b = -2$, $c = 2$, $d = -3$.
   Ainsi les solutions sont de la forme
   $$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{tA} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t-2 \\ 2t-3 \end{pmatrix}, \ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2.$$
   On détermine ensuite α et β pour que les conditions initiales soient satisfaites : $x(0) = 1$, $y(0) = -1$. On obtient la solution suivante, définie sur $\mathbb{R}$,
   $$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (3-t)e^{-t} + t - 2 \\ (2-t)e^{-t} + 2t - 3 \end{pmatrix}.$$

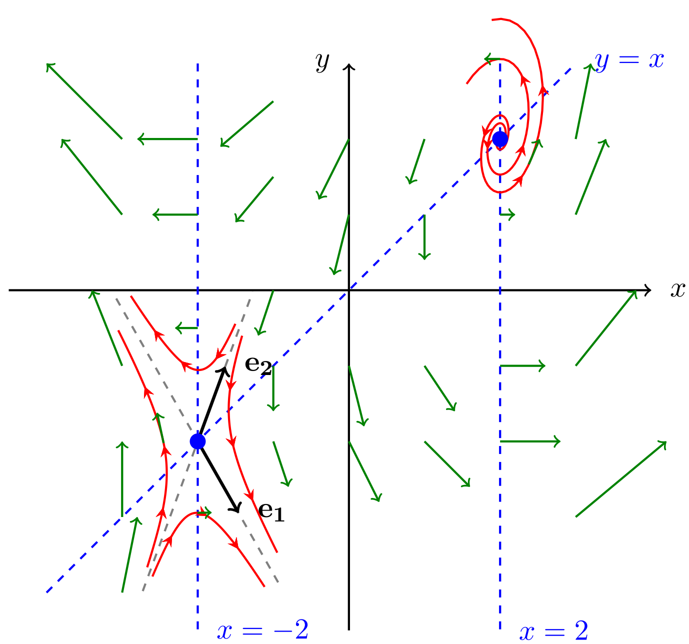
Exercice 2 (40 minutes) (8 points)

1. On définit $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ par $F(x, y) = (x - y, x^2 - 4)$. Cette fonction est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, donc par le théorème de Cauchy-Lipschitz, pour tout $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, le problème de Cauchy
$$\left\{\begin{array}{rcrcll} x'(t) & = & x(t) & - & y(t), & x(0) = x_0, \\ y'(t) & = & x(t)^2 & - & 4, & y(0) = y_0, \end{array}\right.$$
admet une unique solution maximale, définie sur un intervalle ouvert I.

2. Soit $(x^*, y^*) \in \mathbb{R}^2$. (x^*, y^*) est un équilibre pour le système $(\mathscr{S}_4)$ si et seulement si $x^* - y^* = 0$ et $(x^*)^2 - 4 = 0$. Il y a donc exactement deux équilibres : $(2, 2)$ et $(-2, -2)$.

3. On calcule la jacobienne de F en tout point (x, y) de $\mathbb{R}^2$:
$$J_F(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2x & 0 \end{pmatrix}.$$
<u>Etude en $(2, 2)$:</u>
$J_F(2, 2) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$, les valeurs propres de $J_F(2, 2)$ sont $\frac{1 \pm i\sqrt{15}}{2}$. $(2, 2)$ est donc un point d'équilibre instable pour le système $(\mathscr{S}_4)$, c'est un foyer.
<u>Etude en $(-2, -2)$:</u>
$J_F(-2, -2) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$, les valeurs propres de $J_F(-2, -2)$ sont $\lambda_\pm = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{2}$, l'une est positive, l'autre négative. $(-2, -2)$ est donc un point d'équilibre instable pour le système $(\mathscr{S}_4)$, c'est un point selle.

4. *Esquisse du portrait de phase.*
Pour le point selle, on obtient deux vecteurs propres associés aux valeurs propres de la matrice $J_F(-2, -2)$ par $\mathbf{e_1} = (1, -4/\lambda_+)^T$ et $\mathbf{e_2} = (1, -4/\lambda_-)^T$. On obtient la figure ci-dessous pour le portrait de phase. Les vecteurs propres sont ici normalisés, et les flèches représentant le champ de vecteurs $F(x, y)$ sont réduites d'un facteur 5.



Exercice 3 (1 heure 10) (16 points)

1. Soit y une solution de $(\mathscr{E}_5)$ sur un intervalle I. Alors $(-y)'' + (-y)^3 = -y'' - y^3 = 0$ sur I, donc $-y$ est solution de $(\mathscr{E}_5)$ sur I.
2. La fonction y est solution de $(\mathscr{E}_5)$ sur un intervalle I si, et seulement si $X = (y, y')^T$ est solution sur I de $X'(t) = f(X(t))$ où $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est définie par $f(x_1, x_2) = (x_2, -(x_1)^3)^T$.
3. La fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. Le théorème de Cauchy-Lipschitz implique donc que le problème de Cauchy $X'(t) = f(X(t)),\ X(0) = (y_0, y_0')^T$ admet une unique solution X définie sur un intervalle ouvert J contenant 0.
4. D'après les réponses aux questions 2. et 3. il existe une unique solution maximale y au problème de Cauchy $(\mathscr{C}_5)$, définie sur l'intervalle ouvert J.
5. La fonction H est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et les fonctions y et y' sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur J. La fonction $t \mapsto H(y(t), y'(t))$ est donc continûment dérivable sur J et on a, pour tout $t \in J$:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}H(y(t), y'(t)) &= \frac{\partial H}{\partial x_1}(y(t), y'(t))y'(t) + \frac{\partial H}{\partial x_2}(y(t), y'(t))y''(t) \\ &= y(t)^3y'(t) + y'(t)y''(t) = y'(t)\left(y''(t) + y(t)^3\right) = 0.\end{aligned}$$

   Comme J est un intervalle, on a pour tout $t \in J$, $H(y(t), y'(t)) = H(y_0, y_0')$.
6. On déduit de la question précédente que pour tout $t \in J$, $|y(t)| \leq \sqrt{2}H(y_0, y_0')^{1/4}$ et $|y'(t)| \leq \sqrt{2}H(y_0, y_0')^{1/2}$. Donc y et y' sont bornées sur J.
7. Soit X une solution de $X'(t) = f(X(t))$ définie sur un intervalle J et soit $t_0 \in J$. On déduit de la question précédente que

$$\sup_{t\in J} \| X(t) \|_\infty \leq \alpha,\ \text{où } \alpha = \sqrt{2}\max\left(H(y(t_0), y'(t_0))^{1/4}, H(y(t_0), y'(t_0))^{1/2}\right).$$

   Ainsi pour tout $t \in J$, la solution $X(t)$ reste dans la boule fermée de centre $0_{\mathbb{R}^2}$ et de rayon α (pour la norme $\|\cdot\|_\infty$). Cette boule étant compacte dans $\mathbb{R}^2$, par la contraposée du théorème des bouts, on obtient que $\sup J = +\infty$ et $\inf J = -\infty$ *i.e.* toute solution de $X'(t) = f(X(t))$ est globale sur $\mathbb{R}$. D'après la question 4. on en déduit que toute solution de $(\mathscr{E}_5)$ est aussi globale sur $\mathbb{R}$.
8. Si $y(t_0) = y'(t_0) = 0$, alors la fonction y est aussi solution sur $\mathbb{R}$ du problème de Cauchy suivant : $y''(t) + y(t)^3 = 0,\ \forall t \in \mathbb{R},\ \ y(t_0) = 0,\ y'(t_0) = 0$. Elle coïncide donc avec son unique solution maximale qui est la fonction identiquement nulle sur $\mathbb{R}$, ce qui contredit le fait que $(y(0), y'(0)) \neq (0,0)$. Conclusion, si y s'annule en $t_0 \in \mathbb{R}$, alors nécessairement $y'(t_0) \neq 0$. Soit maintenant t_0 tel que $y(t_0) = 0$. Alors, $y'(t_0) \neq 0$ et par continuité de y', il existe un intervalle ouvert I_{t_0} contenant t_0, sur lequel y' est du signe de $y'(t_0)$ et $|y'(t)| \geq |y'(t_0)|/2 > 0$. Il vient alors pour tout $t \in I_{t_0}$,

$$|y(t)| = \left|\int_{t_0}^t y'(s)ds\right| \geq |t - t_0||y'(t_0)|/2.$$

   Ainsi, $y(t) \neq 0$ pour tout t dans $I_{t_0} \setminus \{t_0\}$. On peut ajouter que $y(t)$ change de signe en t_0.
9. (a) Comme y est continue et ne s'annule par sur $[a, +\infty[$, elle est de signe constant sur cet intervalle. On peut traiter uniquement le cas $y(t) > 0$ sur $[a, +\infty[$ pour aboutir à une contradiction. En effet, le cas $y(t) < 0$ s'en déduit car on a vu à la question 1. que la fonction $-y$ est alors une solution du problème de Cauchy avec pour conditions initiales $y(0) = -y_0$, $y'(0) = -y_0'$, et elle est strictement positive sur $[a, +\infty[$. On aboutira donc également à une contradiction en se ramenant au cas positif.

(b) Comme $y(t) > 0$ sur $[a, +\infty[$, on a $y''(t) = -y(t)^3 < 0$ sur $[a, +\infty[$. La fonction y' est donc strictement décroissante sur $[a, +\infty[$. Comme elle est bornée (*c.f.* question 6.), elle admet donc une limite finie y'_∞ losrque $t \to +\infty$.

(c) D'après la question 5. on a pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\frac{1}{4}(y(t))^4 + \frac{1}{2}(y'(t))^2 = H(y_0, y'_0)$. Comme y est strictement positive sur $[a, +\infty[$, on a : pour tout $t \geq a$,

$$y(t) = \sqrt{2}\left(H(y_0, y'_0) - \frac{1}{2}(y'(t))^2\right)^{\frac{1}{4}}.$$

On en déduit que y admet également une limite finie lorsque t tend vers $+\infty$.

(d) Si $y'_\infty \neq 0$, on a $|y(t)| \sim |y'_\infty| t$ au voisinage de $+\infty$, ce qui contredit le fait que y est bornée sur $\mathbb{R}$. Donc $y'_\infty = 0$. La fonction y' est strictement décroissante et tend vers 0 à l'infini, elle est donc strictement positive sur $[a, +\infty[$.

(e) Comme $y' > 0$ sur $[a, +\infty[$, y est strictement croissante sur $[a, +\infty[$. En conséquence, pour tout $t \geq a$, $y(t) \geq y(a)$ donc $y(t)^3 \geq y(a)^3$ soit $y''(t) \leq -y(a)^3$. Il vient alors : pour tout $t \in [a, +\infty[$,

$$y'(t) = y'(a) + \int_a^t y''(s)ds \leq y'(a) - y(a)^3(t-a).$$

(f) L'inégalité ci-dessus implique que $y'(t)$ tend vers $-\infty$ lorsque $t \to +\infty$, ce qui contredit le fait que y' est bornée sur $\mathbb{R}$. Ainsi, l'hypothèse de départ, à savoir que y ne s'annule pas sur $[a, +\infty[$, est fausse.

10. On a $y(t_0) = y(t_1) = 0$. Par le théorème de Rolle, il existe $\bar{t} \in]t_0, t_1[$ tel que $y'(\bar{t}) = 0$. De plus, comme $y'(t_0) > 0$ et que t_0 et t_1 sont deux zéros consécutifs de y, on en déduit que $y(t) > 0$ sur $]t_0, t_1[$, puis que $y''(t) = -y(t)^3 < 0$ sur $]t_0, t_1[$. Ainsi, y' est strictement décroissante sur $]t_0, t_1[$, ce qui implique que $y'(t_1) < y'(\bar{t}) = 0$. Par un raisonnement similaire, on montre que $y'(t_2) > 0$. Si $y'(t_0) < 0$, alors $y'(t_1) > 0$ et $y'(t_2) < 0$.

11. On sait que $H(y(t_2), y'(t_2)) = H(y(t_0), y'(t_0))$. Comme $y(t_0) = y(t_2) = 0$, ceci implique que $y'(t_0)^2 = y'(t_2)^2$. Comme on a montré à la question précédente que $y'(t_0)$ et $y'(t_2)$ ont même signe, on en déduit que $y'(t_0) = y'(t_2)$.

12. Soit $\alpha = y'(t_0)$. D'après la question précédente, les fonctions $t \mapsto y(t)$ et $t \mapsto y(t+T)$ sont toutes deux solutions du problème de Cauchy suivant : $y''(t) + y(t)^3 = 0,\ \forall t \in \mathbb{R},\ \ y(t_0) = 0,\ y'(t_0) = \alpha$. Elles coïncident donc sur $\mathbb{R}$ ce qui veut dire que y est T-périodique.