Université Claude Bernard, Lyon 1
43, boulevard du 11 novembre 1918
69622 Villeurbanne cedex, France

Licence Sciences & Technologies
Spécialité : Mathématiques
UE : EDO/EDP Printemps 2013

Contrôle Partiel Ecrit - Equations Différentielles
26 mars 2013

Avant propos.

La durée de l'examen est de 1h30. Aucun document et aucune calculatrice ne sont autorisés durant l'épreuve. L'usage des téléphones portables est prohibé. La répartition en durée de chacun des exercices n'est qu'à titre indicatif. La justification des réponses et un soin particulier de la présentation seront demandés et pris en compte lors de la notation.

Questions de cours (20 minutes) (6 points)

1. (4 points) Enoncer la définition d'une équation aux différentielle totale pour les équations du type
$$(E_1) \quad a(t,x) + b(t,x)x'(t) = 0.$$
Enoncer et démontrer la condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction f relative à l'équation du type (E_1) soit différentielle totale.
2. (2 points) Enoncer, sans le démontrer le théorème des bouts.

Exercice 1 (30 minutes) (9 points)

1. (15 min) (4 points) On considère l'équation différentielle suivante
$$(E_2) \quad tx + (2t^2 + 3x^2 - 20)x' = 0.$$
   a. Expliquer pourquoi cette équation n'est pas linéaire.
   b. Montrer que cette équation n'est pas une équation aux différentielles totales.
   c. Après un choix judicieux de facteur intégrant, résoudre l'équation différentielle ci-dessus en exprimant la solution x dans une équation implicite.
2. (15 min) (5 points) On considère le problème suivant
$$(P_1) \quad \begin{cases} 2tx' + x - tx^3 &= 0, \\ x(t_0) &= x_0, \end{cases}$$
où t et t_0 appartiennent à un intervalle I inclus dans $]0, +\infty[$ qu'il faudra déterminer et $x_0 \in \mathbb{R}$.
   a. A-t-on existence et unicité des solutions pour ce problème (P_1) sur $U =]0, +\infty[\times \mathbb{R}$? Justifier.
   b. On suppose $x_0 = 0$. Quels sont les solutions de (P_1) ?

c. On suppose $x_0 \neq 0$.
   i. Reconnaître le type d'équation différentielle du problème(P_1).
   ii. Résoudre le problème (P_1) en fonction de x_0.
   ii. Les solutions trouvées sont-elles maximales ou globales sur $]0, +\infty[$? Justifier.

d. Donner tous les solutions maximales et globales de ce problème.

e. BONUS (1 point) Tracer trois courbes illustrant les cas $x_0 = 0$, $x_0 > 0$ et $x_0 < 0$.

Exercice 2 (40 minutes) (5 points)

Soit f une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}^m$ à valeurs dans $\mathbb{R}^m$. On considère l'équation différentielle suivante

$$(E_3) \quad x' = f(x).$$

Soit x une solution de (E_3) définie sur un intervalle borné $[0, \alpha[$, avec $\alpha > 0$ et supposons que la fonction $t \mapsto f(x(t))$ soit bornée sur $[0, \alpha[$.

1. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$u_n = x(\alpha - \frac{1}{n}), \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

   (c'est à dire x au point $\alpha - \frac{1}{n}$, et NON PAS x fois $(\alpha - \frac{1}{n})$).
   Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de Cauchy.
2. En déduire qu'il existe $x_\alpha \in \mathbb{R}^m$ tel que

$$\|x(t) - x_\alpha\| \leq M|t - \alpha|,$$

   avec $M = \sup_{t\in[0,\alpha[} \|f(x(t))\|$.
3. Monter que x admet une limite finie quand t tend vers α, à gauche de α.
4. Montrer alors qu'il existe une prolongement de x qui sera solution sur l'intervalle $[0, \alpha]$.

Correction contrôle partiel écrit EDO/EDP 26 mars 2013

Question de cours:

1. a. *Equations aux différentielles totales:*

Considérons l'EDO suivante $a(t,x) + b(t,x)x' = 0$ que l'on peut écrire sous la forme

$$a(t,x)\,dt + b(t,x)\,dx = 0 \quad (E)$$

Supposons a et b continues sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$. On dit que l'équation (E) est une équation aux différentielles totales si et seulement si la fonction
$f: (t,x) \to a(t,x)dt + b(t,x)dx$ est la différentielle d'une certaine fonction

$\omega: U \to \mathbb{R}$, $(t,x) \mapsto \omega(t,x)$. Autrement dit, il existe ω t.q. $f = d\omega$ 1

b. *CNS différentielle totale:*

Soient $(t,x) \mapsto a(t,x)$ et $(t,x) \mapsto b(t,x)$ deux fonctions continues sur un pavé $U = I \times J$. Supposons que $\frac{\partial a}{\partial x}$ et $\frac{\partial b}{\partial t}$ existent et sont continues sur U, alors
$f: (t,x) \to a(t,x)dt + b(t,x)dx$ est une différentielle totale si et seulement si pour tout $(t,x) \in U$ 1

$$\frac{\partial a}{\partial x}(t,x) = \frac{\partial b}{\partial t}(t,x)$$

Preuve: $\Rightarrow$ f est totale. On suppose qu'il existe $\omega: U \to \mathbb{R}$ t.q. $f = d\omega$

Alors $a(t,x) = \frac{\partial \omega}{\partial t}(t,x)$ et $b(t,x) = \frac{\partial \omega}{\partial x}(t,x)$ sur U.

D'où $\frac{\partial a}{\partial x} = \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial t}$ et $\frac{\partial b}{\partial t} = \frac{\partial^2 \omega}{\partial t \partial x}$ 1

Par le théorème de Schwarz $\frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial t} = \frac{\partial^2 \omega}{\partial t \partial x}$ et donc $\frac{\partial a}{\partial x} = \frac{\partial b}{\partial t}$

$\Leftarrow$ On a $\frac{\partial a}{\partial x} = \frac{\partial b}{\partial t}$ montrons qu'il existe $\omega: U \to \mathbb{R}$ t.q. $f = d\omega$

On pose: $\frac{\partial \omega}{\partial t} = a(t,x)$ et $\frac{\partial \omega}{\partial x} = b(t,x)$ $(*)$ 1

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = a(t,x) \Rightarrow \omega(t,x) = \int_{t_0}^{t} a(s,x)\,ds + C(x)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \omega}{\partial x} = \int_{t_0}^{t} \frac{\partial}{\partial x} a(s,x)\,ds + C'(x) = b(t,x) \quad (\text{d'après } (*))$$

D'où $\int_{t_0}^{t} \frac{\partial}{\partial t} b(s,x)\,ds + C'(x) = b(t,x) \Rightarrow \left[b(s,x)\right]_{t_0}^{t} + C'(x) = b(t,x)$

et donc $c'(x) = b(t_0, x) \Rightarrow c(x) = \int_{x_0}^{x} b(t_0, x)\,dx + k$, x_0 fixé $\in J$ et k constante $\in \mathbb{R}$

$\Rightarrow w(t,x) = \int_{t_0}^{t} a(s,x)\,ds + \int_{x_0}^{x} b(t_0, x)\,dx + k$ et on a bien $dw = f$.

2. Théorème des bouts

Soient $f \in \mathcal{C}(I \times J; \mathbb{R}^n)$, où I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et J un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $(t_0, x_0) \in I \times J$. On suppose f localement lipschitzienne par rapport à sa variable x.

1 Soit $x \in \mathcal{C}^1(\tilde{I}; J)$ une solution maximale sur I de $x' = f(t,x)$

On note b la borne supérieure de I et $\beta \leq b$ la borne supérieure de $\tilde{I}$.

Alors ou bien $\beta = b$

ou bien x sort de tout compact de J, c'est-à-dire que pour tout compact $K \subset J$

1 il existe $\eta < \beta$ tel que $x(t) \in J \setminus K$ pour $t \geq \eta$ avec $t \in \tilde{I}$

De même si $\inf \tilde{I} > \inf I$ alors x sort de tout compact lorsque t tend vers $\inf \tilde{I}$ par la droite.

Exercice 1

a. Le coefficient devant x' dépend de x : (E_2) est donc non linéaire

1

b. $tx + (2t^2 + 3x^2 - 2)x' = 0 \Leftrightarrow (tx)dt + (2t^2 + 3x^2 - 2)dx = 0$

On pose $a(t,x) = tx$ $\quad b(t,x) = 2t^2 + 3x^2 - 2$.

1 $\frac{\partial a}{\partial x} = t$ $\quad \frac{\partial b}{\partial t} = 4t$ $\quad \frac{\partial a}{\partial x} \neq \frac{\partial b}{\partial t}$ donc (E_2) n'est pas aux différentielles totales.

c. On remarque que $\dfrac{\frac{\partial b}{\partial t} - \frac{\partial a}{\partial x}}{a} = \dfrac{4t - t}{tx} = \dfrac{3t}{tx} = \dfrac{3}{x}$

1 Donc un choix judicieux de facteur intégrant serait

$\mu(x) = e^{\int 3/x\,dx} = e^{3 \ln x} = x^3$

(on suppose $x \neq 0$ sur un intervalle I, d'ailleurs $x = 0$ est solution de (E_2)).

Il vaut alors que $(E_2) \Leftrightarrow tx^4 + (2t^2+3x^2-20)x^3 x' = 0$

Alors $\tilde{a}(t,x) = tx^4$ $\quad \frac{\partial \tilde{a}}{\partial x} = 4tx^3$

$\tilde{b}(t,x) = (2t^2+3x^2-20)x^3$ $\quad \frac{\partial \tilde{b}}{\partial t} = 4tx^3$

On a bien $\frac{\partial \tilde{a}}{\partial x} = \frac{\partial \tilde{b}}{\partial t}$. La nouvelle équation est bien exacte.

D'autre part, on pose $\frac{\partial w}{\partial t} = \tilde{a}(t,x)$, alors $w(t,x) = \frac{t^2}{2}x^4 + c(x)$

et $\frac{\partial w}{\partial x} = \tilde{b}(t,x)$ $\quad \Downarrow$ $\quad \frac{\partial w}{\partial x} = 4\frac{t^2}{2}x^3 + c'(x) = 2t^2x^3 + c'(x)$

Par identification on devrait avoir $\tilde{b}(t,x) = 2t^2x^3 + c'(x)$

C'est à dire $2t^2x^3 + 3x^5 - 20x^3 = 2t^2x^3 + c'(x)$

$\Leftrightarrow \quad 3x^5 - 20x^3 = c'(x)$

$\Rightarrow c(x) = \frac{3}{6}x^6 - \frac{20}{4}x^4 + K$ où $K \in \mathbb{R}$

D'où $w(t,x) = \frac{t^2}{2}x^4 + \frac{1}{2}x^6 - 5x^4 + K$

D'où $(E_2) \Leftrightarrow w(t,x) = C$

$\Leftrightarrow \frac{t^2}{2}x^4 + \frac{1}{2}x^6 - 5x^4 = \tilde{C}$ $\quad (\tilde{C} = C - K \in \mathbb{R})$

2. Sur $\Omega =]0,+\infty[\times \mathbb{R}$ (P_1) peut s'écrire $x' = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2t}x = f(t,x)$

a. f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[\times\mathbb{R}$, donc a fortiori $\mathcal{C}^1$, donc localement lipschitzienne.
D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz (P_1) admet une unique solution

b. Si $x_0 = 0$, autrement dit $x(t_0) = x_0$, on voit que $x \equiv 0$ est solution de (P_1)
et d'après l'unicité des solutions, c'est la seule solution possible.

Donc si $x_0 = 0$, on a $x \equiv 0$ sur $]0,+\infty[$ seule solution de (P_1).
et c'est une solution globale sur $]0,+\infty[$.

Méthode 2 : x est solution de (E)

Donc $x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(x(s))ds$, $t_0 \in [0,\alpha[$ et $t \in [0,\alpha[$

D'où $x\left(\alpha - \frac{1}{n+p}\right) - x\left(\alpha - \frac{1}{n}\right) = \int_{t_0}^{\alpha - \frac{1}{n+p}} f(x(s))ds - \int_{t_0}^{\alpha - \frac{1}{n}} f(x(s))ds = \int_{\alpha - \frac{1}{n}}^{\alpha - \frac{1}{n+p}} f(x(s))ds$

D'où $\left\| x\left(\alpha - \frac{1}{n+p}\right) - x\left(\alpha - \frac{1}{n}\right) \right\| \leq \int_{\alpha - \frac{1}{n}}^{\alpha - \frac{1}{n+p}} \|f(x(s))\| ds \leq \int_{\alpha - \frac{1}{n}}^{\alpha - \frac{1}{n+p}} M ds = M \left| \frac{1}{n+p} - \frac{1}{n} \right|$

Par les mêmes arguments que la méthode 1, on a $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de Cauchy dans $\mathbb{R}^m$.

2. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}^m$, $\mathbb{R}^m$ est complet, donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente dans $\mathbb{R}^m$.

Autrement dit, il existe $x_\alpha \in \mathbb{R}^m$ t.q. $\lim_{n\to+\infty} u_n = x_\alpha$.

D'autre part, pour tout $t \in [0,\alpha[$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$\|x(t) - u_n(t)\| = \|x(t) - x\left(\alpha - \tfrac{1}{n}\right)\| = \left\| \int_{\alpha - \frac{1}{n}}^{t} f(x(s))ds \right\| \leq M. \left| t - \alpha + \tfrac{1}{n} \right|$$

quand $n \to +\infty$, $u_n \to x_\alpha$ et $t - \alpha + \frac{1}{n} \to t - \alpha$.

On obtient alors :

$\|x(t) - x_\alpha\| \leq M. |t - \alpha|$ pour tout $t \in [0,\alpha[$.

3. Comme $\|x(t) - x_\alpha\| \leq M|t-\alpha|$ " " et $\lim_{t\to\alpha^-} |t-\alpha| = 0$

on a $\lim_{t\to\alpha^-} x(t) = x_\alpha$

4. On considère la fonction $t \mapsto z(t) = \begin{cases} x(t) & \text{si } t \in [0,\alpha[\\ x_\alpha & \text{si } t = \alpha \end{cases}$

Comme x est continue sur $[0,\alpha[$ et $\lim_{t\to\alpha^-} x(t) = x_\alpha$ alors z est continue sur $[0,\alpha]$

et pour tout $t \in [0,\alpha[$ $\quad z(t) = x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(x(s))ds = z(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(z(s))ds$

Pour $t = \alpha$ $\quad z(\alpha) = x_\alpha = \lim_{t\to\alpha^-} x(t) = \lim_{t\to\alpha^-} z(t_0) + \int_{t_0}^{t} \underbrace{f(z(s))}_{\text{bornée}} ds$ donc $\lim_{t\to\alpha^-} \int_{t_0}^{t} f(z(s))ds$ existe

et $\quad z(\alpha) = z(t_0) + \int_{t_0}^{\alpha} f(z(s))ds$.

Donc si $0 < t < t_0 e^{t_0/x_0^2}$ on a $x^2(t) = \dfrac{1}{\frac{t_0}{x_0^2}\cdot t - t\ln\left(\frac{t}{t_0}\right)}$

Autrement dit $x(t) = \left(\frac{t_0}{x_0^2}\cdot t - t\ln\left(\frac{t}{t_0}\right)\right)^{-1/2}$ sur $]0, t_0 e^{t_0/x_0^2}[$, donc les solutions non nulles sont maximales

ou $x(t) = -\left(\frac{t_0}{x_0^2}\, t - t\ln\left(\frac{t}{t_0}\right)\right)^{-1/2}$ et non globales.

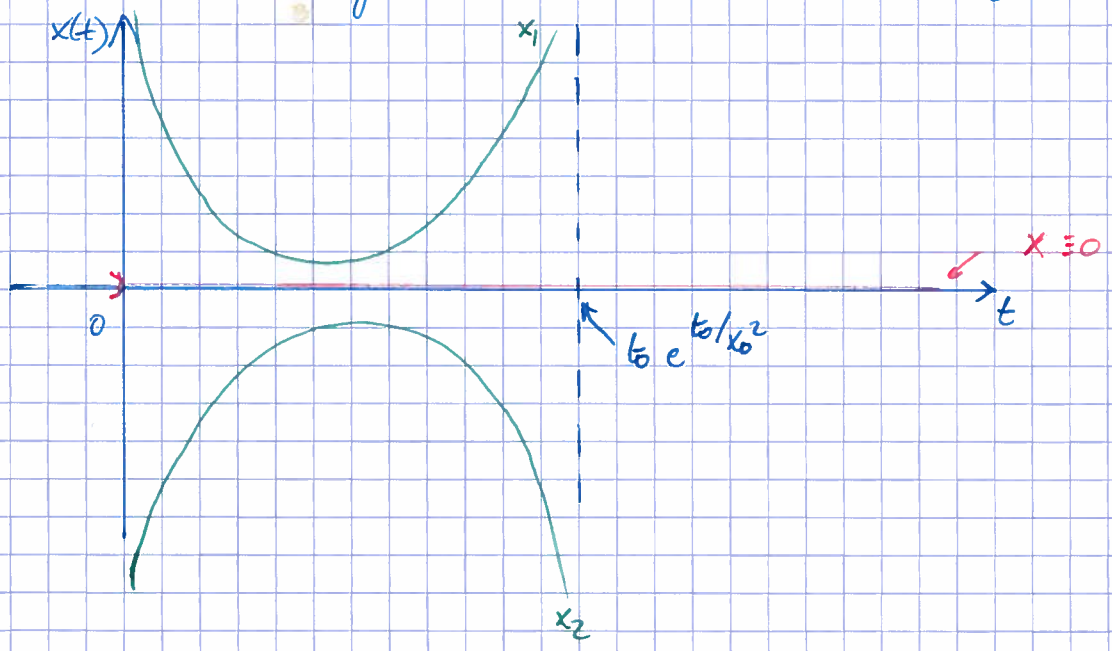
d. Conclusion: les solutions maximales de (R) sont:

les fonctions de la forme $x_1(t) = \left(\frac{t_0}{x_0^2}\cdot t - t\ln\left(\frac{t}{t_0}\right)\right)^{-1/2}$, $t \in]0, t_0 e^{t_0/x_0^2}[$

ou " " $x_2(t) = -\left(\frac{t_0}{x_0}\, t - t\ln\left(\frac{t}{t_0}\right)\right)^{-1/2}$, "

la solution globale est la solution $x \equiv 0$ sur $]0, +\infty[$.

e.



Exercice 2

1. On peut le faire de 2 façons:

Méthode 1 : $t \mapsto f(x(t))$ est bornée sur $[0, \alpha[$ et x solution de (E_3)

Donc $x'(t)$ est bornée pour tout $t \in [0, \alpha[$

Donc il existe $M > 0$ t.q. pour tout $t \in [0, \alpha[$ $\|x'(t)\| \leq M$

D'après le théorème des accroissements finis

$$\left\| x\left(\alpha - \frac{1}{n+p}\right) - x\left(\alpha - \frac{1}{n}\right)\right\| \leq M \left| \frac{1}{n+p} - \frac{1}{n}\right|$$

or $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$, donc pour tout $\varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$, t.q. pour tous $n \geq N$, $p \geq 0$ $\left|\frac{1}{n+p} - \frac{1}{n}\right| < \frac{\varepsilon}{M}$ et donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}^m$.

c. On a vu que (P_1) peut s'écrire sous la forme $\begin{cases} x' + \frac{x}{2t} - \frac{x^3}{2} = 0, \quad t \in]0,+\infty[\\ x(t_0) = x_0 \neq 0 \end{cases}$

i. On reconnaît une équation de Bernoulli de la forme $x' + P(t)x + Q(t)x^r = 0$

où $r = 3$ $\quad P(t) = \frac{1}{2t}$ et $Q(t) = -\frac{1}{2}$

ii. Comme $x_0 \neq 0$ on a $x(t) \neq 0$ pour tout $t \in]0,+\infty[$.

donc soit $x(t) > 0$ pour tout $t \in]0,+\infty[$

soit $x(t) < 0$ " $t \in]0,+\infty[$

On effectue le changement d'inconnue $u = x^{1-r} = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$

Alors u vérifie $u' + (1-3)P(t)u + (1-3)Q(t) = 0$

c'est à dire $u' - 2 \cdot \frac{1}{2t} u + 2 \cdot \frac{1}{2} = 0$

$\Leftrightarrow u' - \frac{1}{t} u + 1 = 0 \quad (E)$

Résolvons (E) sur $]0,+\infty[$: on a : $e^{-\int_{t_0}^{t} \frac{1}{s} ds} = e^{-[\ln s]_{t_0}^{t}} = e^{-\ln t + \ln t_0} = \frac{t_0}{t}$

$(E) \Leftrightarrow \left(\frac{t_0}{t} \cdot u\right)' = -\frac{t_0}{t}$

$\Rightarrow \int_{t_0}^{t} \left(\frac{t_0}{s} u(s)\right)' ds = -t_0 \int_{t_0}^{t} \frac{1}{s} ds \Rightarrow \left[\frac{t_0}{t} \cdot u(t) - u(t_0)\right] = -t_0 [\ln(t) - \ln(t_0)]$

$= -t_0 \cdot \ln\left(\frac{t}{t_0}\right)$

d'où $\frac{t_0}{t} u(t) = u(t_0) - t_0 \ln\left(\frac{t}{t_0}\right)$

$\Rightarrow u(t) = t_0 u(t_0) \cdot t - t \ln\left(\frac{t}{t_0}\right)$

Donc, sur $]0,+\infty[$, les solutions non nulles vérifient

$\begin{cases} \frac{1}{x^2} = \frac{t_0}{x_0^2} \cdot t - t \cdot \ln\left(\frac{t}{t_0}\right) \\ \text{et } x(t_0) = x_0 \end{cases}$, t.q. $\frac{t_0}{x_0^2} \cdot t - t \ln\left(\frac{t}{t_0}\right) > 0$ et $t > 0$

Autrement dit :

$\frac{t_0}{x_0^2} \cdot t - t \ln\left(\frac{t}{t_0}\right) > 0 \Leftrightarrow t\left[\frac{t_0}{x_0^2} - \ln\left(\frac{t}{t_0}\right)\right] > 0$ et $t > 0$

$\Leftrightarrow \frac{t_0}{x_0^2} > \ln\left(\frac{t}{t_0}\right)$

$\Leftrightarrow e^{t_0/x_0^2} > \frac{t}{t_0}$

$\Leftrightarrow t_0 e^{t_0/x_0^2} > t$