Université Claude Bernard Lyon 1
43, boulevard du 11 novembre 1918
69622 Villeurbanne cedex, France

Licence Sciences & Technologies
Spécialité : Mathématiques
UE : EDO/EDP Printemps 2015

Contrôle Partiel Ecrit - Equations Différentielles
26 mars 2015

Avant propos.

La durée de l'examen est de 2h. Aucun document et aucune calculatrice ne sont autorisés durant l'épreuve. L'usage des téléphones est prohibé. La répartition en durée de chacun des exercices n'est qu'à titre indicatif. La justification des réponses et un soin particulier de la présentation seront demandés et pris en compte lors de la notation.

Questions de cours (20 minutes) (5 points)

1. (2 points) Enoncer, sans le démontrer le théorème de Cauchy-Lipschitz local.
2. (3 points) Enoncer et démontrer le lemme de Gronwall sous forme d'inéquation différentielle.

Exercice 1 (30 minutes) (5 points)

Pour $y_0 \in \mathbb{R}$, on s'intéresse au problème de Cauchy suivant :

$$(\mathscr{C}_1) \quad \begin{cases} y'(t) = (y(t))^2 \left(1 - e^{y(t)}\right), & t \in \mathbb{R}, \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

1. (1 point) Soit $y_0 \in \mathbb{R}$. Montrer que le problème $(\mathscr{C}_1)$ admet une unique solution maximale y, définie sur un intervalle ouvert. Montrer de plus que cette solution est de classe $\mathscr{C}^\infty$.
2. (1 point) Quelles sont les solutions stationnaires (*i.e.* les fonctions constantes solutions) de l'équation différentielle $y'(t) = (y(t))^2\left(1 - e^{y(t)}\right)$?
3. (1 point) Dans la suite, on fixe $y_0 > 0$. On note (y, J) la solution maximale associée à la donnée initiale y_0. Montrer que pour tout $t \in J$, $y(t) > 0$.
4. (1 point) Montrer que $\sup J = +\infty$.
5. (1 point) Montrer que $\lim\limits_{t \to +\infty} y(t) = 0$.

Exercice 2 (30 minutes) (5 points)

On considère l'équation différentielle suivante

$$(\mathscr{E}_1) \;\; t^2 + x^2(t) - 5 = (x(t) + tx(t))x'(t),$$

pour $t \in]-1, \infty[$.

1. (0.5 point) Expliquer pourquoi cette équation $(\mathscr{E}_1)$ n'est pas linéaire.
2. (1 point) Montrer que cette équation $(\mathscr{E}_1)$ n'est pas une équation aux différentielles totales.
3. (1.5 point) Déterminer un facteur intégrant associé à l'équation $(\mathscr{E}_1)$.
4. (1 points) Exprimer alors les solutions x dans une équation implicite.
5. (1 point) Donner la solution de $(\mathscr{E}_1)$ satisfaisant $x(0) = 1$.

Exercice 3 (40 minutes) (6 points)

On considère le problème de Cauchy suivant

$$(\mathscr{C}_2) \left\{ \begin{array}{rcl} (4-t^2)^2 x'(t) + 8tx^2(t) & = & 0, \\ x(t_0) & = & x_0, \end{array} \right.$$

où t et t_0 appartiennent à un intervalle I inclus dans $\mathbb{R}$ qu'il faudra déterminer dans cet exercice (il pourra exister plusieurs intervalle I possibles), et $x_0 \in \mathbb{R}$.

1. (0.5 point) Est-ce que cette équation est linéaire. Justifier.
2. (1 point) A-t-on existence et unicité des solutions de ce problème $(\mathscr{C}_2)$ sur $U = I \times \mathbb{R}$? Justifier.
3. (1 point) On suppose $x_0 = 0$. Quelle est la solution de $(\mathscr{C}_2)$? Est-elle maximale ou globale dans $]0, +\infty[$? Justifier.
4. (3.5 points) On suppose maintenant $x_0 \neq 0$.
   (a) (1 point) Calculer
   $$\int \frac{8t}{(4-t^2)^2} dt.$$
   Indication : penser à utiliser la dérivée de $4 - t^2$.
   (b) (1 point) En déduire les solutions de $(\mathscr{C}_2)$ en fonction de x_0. Détailler les calculs.
   (c) (1.5 point) Les solutions trouvées sont-elles maximales ou globales dans $\mathbb{R}$ en fonction de x_0 ? Justifier.
5. (Bonus : +1 point) Donner toutes les solutions maximales et globales dans $\mathbb{R}$ de ce problème.