Université Lyon 1

Feuille 1 - Résolution explicite

Exercice 1. (*Ordre et linéarité*)

Donner l'ordre de chacune des équations différentielles suivantes et établir si elles sont linéaires ou non-linéaires, et autonomes ou non-autonomes.

(a) $x^2y''(x) - 4xy'(x) + y(x) = \sin x$

(b) $y^{(3)}(x) - \left(1 + y(x) + \dfrac{(y'(x))^2}{3}\right) y'(x) + 5y(x) = 0$

(c) $(y(x)^3 + y(x) - 1) - xy'(x) = 0$

(d) $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \sqrt{1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}$

Exercice 2. (*Equations linéaires scalaires du premier ordre*)

On s'intéresse ici aux équations différentielles de la forme suivante

$$y'(t) = a(t)y(t) + f(t), \quad t \in I \tag{1}$$

où I est un intervalle de $\mathbb{R}$, $a : I \to \mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions continues sur I données, et $y : I \to \mathbb{R}$ est la fonction inconnue.

1. Soit $t_0 \in I$, $y_0 \in \mathbb{R}$. Montrer que la fonction y définie sur I par :

$$\forall t \in I,\ y(t) = e^{\int_{t_0}^t a(s)ds} y_0 + \int_{t_0}^t e^{\int_s^t a(\sigma)d\sigma} f(s)ds \tag{2}$$

   est solution de (1) sur I et vérifie $y(t_0) = y_0$.
   Cette formule est appelée *formule de Duhamel.*

2. Retrouver la formule de Duhamel en utilisant la méthode de variation de la constante pour résoudre (1).

3. *Des exemples.*

   (a) Donner la solution au problème suivant

$$\begin{cases} y'(t) + \dfrac{y(t)}{t^2} = -\dfrac{1}{t^3},\ t \in]0, +\infty[\\ y(1) = 1 \end{cases}$$

   (b) Résoudre les équations différentielles suivantes. Dans les deux cas, on précisera l'intervalle de définition des solutions maximales.

      i. $(1 - t^2)y'(t) + ty(t) = 3t,\ t \in \mathbb{R}.$

      ii. $(\sin t)y'(t) + (\cos t)y(t) = 1,\ t \in] - \pi, \pi[.$

Exercice 3. (*Equations linéaires scalaires du deuxième ordre à coefficients constants*)

Dans tout l'exercice, a, b et c sont des réels avec $a \neq 0$.

1. On s'intéresse tout d'abord aux équations différentielles de la forme suivante

$$\text{(H)} \qquad ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

On note $\mathcal{S}_{\mathrm{H}}$ l'ensemble des solutions de H.

(a) Montrer que $\mathcal{S}_{\mathrm{H}}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$.

(b) On admet le résultat suivant : *Pour tout $t_0 \in \mathbb{R}$ et tout couple $(y_0, y_0') \in \mathbb{R}^2$, il existe une unique solution y de* (H) *sur $\mathbb{R}$ qui vérifie $y(t_0) = y_0$ et $y'(t_0) = y_0'$.*
En considérant l'application :

$$\Phi_{t_0} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{S}_{\mathrm{H}} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ y & \longmapsto & (y(t_0), y'(t_0)), \end{array} \right.$$

donner la dimension $\mathcal{S}_{\mathrm{H}}$.

(c) Pour décrire l'ensemble des solutions de (H), on cherche à exhiber une base de l'espace $\mathcal{S}_{\mathrm{H}}$. Pour cela, on cherche les solutions (éventuellement à valeurs complexes) de la forme $y(x) = e^{rx}$ où $r \in \mathbb{C}$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur a, b, c, et r pour que y soit solution de (H).

(d) Trouver une base de $\mathcal{S}_{\mathrm{H}}$ composée de fonctions **réelles**. *Indication : on pourra distinguer trois cas en partant de la question précédente.*

2. Soit I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$. On s'intéresse maintenant à l'équation non homogène suivante

$$\text{(E)} \qquad ay''(t) + by'(t) + cy(t) = f(t), \quad t \in I.$$

On note $\mathcal{S}_{\mathrm{E}}$ l'ensemble des solutions de (E).

(a) Soit $y_{\mathrm{E}} \in \mathcal{S}_{\mathrm{E}}$. Montrer que pour toute fonction y solution de (E) sur I, il existe une fonction $y_{\mathrm{H}} \in \mathcal{S}_{\mathrm{H}}$ telle que $y = y_{\mathrm{E}} + y_{\mathrm{H}}$ sur I.

(b) *(Variation des constantes)* On cherche une solution particulière de (E). Soit (y_1, y_2) une base de $\mathcal{S}_{\mathrm{H}}$. Soient $\lambda(t)$ et $\mu(t)$ deux fonctions dans $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ telles que :

$$\forall t \in I, \qquad \left\{ \begin{array}{l} \lambda'(t) y_1(t) + \mu'(t) y_2(t) = 0, \\ \lambda'(t) y_1'(t) + \mu'(t) y_2'(t) = f(t). \end{array} \right.$$

Montrer que la fonction $y(t) = \lambda(t) y_1(t) + \mu(t) y_2(t)$ est une solution de (E).

3. *Exemple.* On considère l'équation différentielle

$$y''(t) - y(t) = f(t), \quad t \in I. \tag{3}$$

(a) En utilisant la méthode que l'on vient de décrire montrer que les solutions de l'équation différentielle (3) sont de la forme

$$y(t) = \overbrace{\lambda e^{t - t_0} + \mu e^{-(t - t_0)}}^{y_H} + \overbrace{\int_{t_0}^{t} \operatorname{sh}(t - s) f(s) ds}^{y_E}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}, t_0 \in I. \tag{4}$$

(b) Montrer que y est solution de (3) si, et seulement si, $X = (y, y')^T$ est solution de

$$(\mathcal{E}) \qquad X'(t) = AX(t) + F(t), \quad t \in I,$$

où A est une matrice carrée et F une fonction de $\mathcal{C}(I, \mathbb{R}^2)$ que l'on déterminera.

(c) Montrer que A est diagonalisable, et l'écrire sous la forme $A = PDP^{-1}$, où D est une matrice diagonale. Calculer e^{tA} pour tout réel t.

(d) Montrer que la résolution de $(\mathcal{E})$ se ramène à la résolution de deux équations différentielles linéaires du **premier ordre** non couplées. Résoudre ces équations.

(e) Soit $t_0 \in I$, $X_0 \in \mathbb{R}^2$. Déduire des questions précédentes que la solution de $(\mathcal{E})$ vérifiant $X(t_0) = X_0$ est donnée par

$$\forall t \in I, \; X(t) = e^{(t-t_0)A} X_0 + \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)A} F(s) ds. \tag{5}$$

Remarque : en fait, la formule de Duhamel (5) pour les solutions de l'équation $(\mathcal{E})$ est valable pour tout matrice A, y compris en dimension plus grande que 2.

(f) Vérifier que l'on retrouve bien l'expression (4) pour $y(t)$ avec la formule de Duhamel (5).

Exercice 4. (*Séparation des variables*)

Résoudre les équations différentielles ci-dessous. Donner les solutions maximales et indiquer si elles sont globales.

(a) $y(t)y'(t) = -t, \; t \in \mathbb{R}$

(b) $y'(t) = \dfrac{1}{t^2} y(t)\big(y(t) - 1\big), \; t > 0$

(c) $y'(t) = (y(t) + 3t)^3 - 3, \; t \in \mathbb{R}$

Pour les équations (b) et (d), trouver la (les) solution(s) maximale(s) satisfaisant l'égalité supplémentaire : $y(1) = 3$.

Exercice 5. (*Equations de Bernoulli*)

Résoudre les équations de Bernoulli suivantes :

(a) $\dfrac{dy}{dx} + y = \dfrac{1}{y^2}$,

(b) $\dfrac{dy}{dx} = y(xy^3 - 1)$.

Exercice 6. (*Equation de Ricatti*)

L'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} = P(x) + Q(x)y + R(x)y^2$$

(où P, Q et R sont des fonctions données) est connue sous le nom d'équation de Ricatti.

1. Une équation de Ricatti peut être résolue par une succession de deux substitutions pourvu que nous connaissions une solution particulière y_1 de l'équation. Indiquer comment résoudre cette équation en utilisant le changement d'inconnue $y = y_1 + u$.

2. *Application.* Trouver les solutions de l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{4}{x^2} - \frac{1}{x}y + y^2.$$

Exercice 7. (*Equations aux différentielles totales*)

Montrer que les équations différentielles suivantes peuvent s'écrire comme des équations aux différentielles totales et les résoudre :

1. $(x^2 - 1)y'(x) + 2xy = 0$
2. $y(1 - x^2)y'(x) = xy^2 - \sin x \cos x$.

Exercice 8. (*Facteurs intégrants*)

1. Trouver la valeur $\alpha \in \mathbb{R}$ pour laquelle l'équation différentielle suivante est aux différentielles totales :

$$(y^3 + \alpha xy^4 - 2x)dx + (3xy^2 + 20x^2y^3)dy = 0.$$

Résoudre ensuite cette équation.

2. Résoudre l'équation différentielle suivante en trouvant un facteur intégrant approprié :

$$(2y^2 + 3x)dx + 2xydy = 0.$$

Exercice 9. (*Equation présentant une homogénéité*)

1. On considère une équation différentielle générale de la forme

$$y' = f\left(\frac{y}{t}\right)$$

avec $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$. Indiquer comment résoudre ce problème en utilisant le changement d'inconnue $y(t) = tu(t)$.

2. *Exemple.* Résoudre l'équation différentielle

$$y' = \frac{y^2 + ty - t^2}{t^2}.$$

Exercice 10. (*Solution maximale, globale*)

On se donne deux fonctions continues et strictement positives $\varphi, \psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On considère l'équation différentielle

$$x' = \varphi(x)\psi(t) \tag{6}$$

1. On suppose dans cette partie qu'on a

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{\varphi(y)}\, dy = \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{\varphi(y)}\, dy = +\infty \qquad \text{et} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(y)\, dy < +\infty.$$

Montrer que toute solution maximale est globale et possède deux asymptotes horizontales distinctes.

2. On suppose ici que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\varphi(y)}\, dy < +\infty \qquad \text{et} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(y)\, dy < +\infty$$

avec

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\varphi(y)}\, dy > \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(y)\, dy.$$

Montrer que l'équation différentielle (6) possède une infinité de solutions globales ainsi qu'une infinité de solutions maximales non globales.

3. *Un exemple.* Considérons l'équation différentielle suivante :

$$x' = \left(\frac{x^2 + 1}{t^4 + 1}\right)^{1/3}.$$

Que peut-on dire des solutions de cette équation ?

EDO - Feuille TD 1

Exercice 1.

a) $x^2y''(x) - 4xy'(x) + y(x) = \sin x$

Ordre 2, linéaire, non-autonome

(b) $y^3(x) - \left(1 + y(x) + \frac{(y'(x))^2}{3}\right) y'(x) + 5y(x) = 0$

Ordre 3, non-linéaire, autonome

$\boxed{⚠ \ y^{(3)}(x) \neq y(x)^3}$

(c) $(y(x)^3 + y(x) - 1) - x y'(x) = 0$

Ordre 1, non-linéaire, non-autonome.

(d) $\frac{d^2y}{dx^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$

Ordre 2, non linéaire, autonome

Exercice 2: $y'(t) = a(t)y(t) + f(t)$ (1)

$t \in I$ $I \subset \mathbb{R}$ $a : I \to \mathbb{R}$ $f : I \to \mathbb{R}$ continues

y inconnue

1. Mq $y(t) = e^{\int_{t_0}^t a(s)ds} y_0 + \int_{t_0}^t e^{\int_s^t a(\sigma)d\sigma} f(s) ds$ (2) solut° de (1

$y'(t) = a(t)e^{\int_{t_0}^t a(s)ds} y_0 + \left(\int_{t_0}^t e^{\int_s^t a(\sigma)d\sigma} f(s)ds\right)'$ Soit $R(t,s) = \int_s^t a(\sigma)d\sigma$

$= \frac{dR(t,t_0)}{dt} e^{R(t,t_0)} y_0 + \frac{dR(t,t_0)}{dt} \int_{t_0}^t e^{R(t,s)} f(s)ds + \underbrace{e^{R(t,t_0)} f(t)}_{F(t)}$ $y(t) = e^{R(t,t_0)} y_0 + \int_{t_0}^t e^{R(t,s)} f(s)ds$

$F(t) = \int_\alpha^{b(t)} G(t,s)ds - \int_\alpha^{a(t)} G(t,s)ds = \Phi(b(t)) - \Phi(a(t))$

avec $\Phi(x) = \int_\alpha^x G(x,s)ds$ et $\Phi'(x) = \int_\alpha^x \frac{\partial G}{\partial x}(x,s)ds$

Donc $F'(t) = b'(t)\Phi(b(t)) - a'(t)\Phi'(a(t))$ ....

$\boxed{F'(t) = b'(t)G(t,b(t)) - a'(t)G(t,a(t)) + \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial G}{\partial t}(t,s)ds}$ pour $F(t) = \int_{a(t)}^{b(t)} G(t,s)ds$

$$y(t) = e^{R(t,t_0)} y_0 + \int_{t_0}^{t} e^{R(t,s)} f(s)\,ds$$

On a $R(t,t) = 0$ $\forall t \in I$

$\frac{\partial R}{\partial t}(t,s) = a(t)$

$$y'(t) = \frac{dR}{dt}(t,t_0) e^{R(t,t_0)} y_0 + e^{R(t,t)} f(t) + \int_{t_0}^{t} \frac{\partial R(t,s)}{dt} e^{R(t,s)} f(s)\,ds$$

$$= a(t) e^{\int_{t_0}^{t} a(s)ds} y_0 + f(t) + a(t) \int_{t_0}^{t} e^{\int_s^t a(\sigma)d\sigma} f(s)\,ds$$

$$= a(t) y(t) + f(t)$$

$$-y(t_0) = e^{\int_{t_0}^{t_0} a(s)ds} y_0 + \int_{t_0}^{t_0} e^{\int_s^{t_0} a(\sigma)d\sigma} f(s)\,ds$$

$$= e^0 y_0 + 0 = y_0$$

e) . Solution homogène :

y_h solut° de $y'(t) - a(t)y(t) = 0$

$$y_h(t) = C e^{\int_{t_0}^{t} a(s)ds} \quad \text{avec } C \in \mathbb{R}$$

. sol particulière

On cherche $y_p(t) = C(t) e^{\int_{t_0}^{t} a(s)ds}$

$$y_p'(t) = C'(t) e^{\int_{t_0}^{t} a(s)ds} + C(t)a(t) e^{\int_{t_0}^{t} a(s)ds}$$

y_p solution de E ssi $y_p' - a(t)y_p(t) = f(t)$

ssi $C'(s) e^{\int_{t_0}^{s} a(\sigma)d\sigma} = f(s)$ $\forall s \in I$

On peut prendre $C(t) = \int_{t_0}^{t} e^{-\int_{t_0}^{s} a(\sigma)d\sigma} f(s)\,ds$

Donc $y_p(t) = \int_{t_0}^{t} e^{-\int_{t_0}^{s} a(\sigma)d\sigma} f(s)\,ds \times e^{\int_{t_0}^{t} a(s)ds}$

$$= \int_{t_0}^{t} e^{\int_s^{t_0} a(\sigma)d\sigma + \int_{t_0}^{t} a(\sigma)d\sigma} f(s)\,ds = \int_{t_0}^{t} e^{\int_s^t (a(\sigma)d\sigma)} f(s)\,ds$$

L'ensemble des solutions de (1) sont de la forme

$$y(t) = C e^{\int_{t_0}^{t} a(s)ds} + \int_{t_0}^{t} e^{\int_s^t a(\sigma)d\sigma} f(s)\,ds$$

$$y(t_0) = y_0 \iff C = y_0$$

3. a) $y'(t)+\frac{y(t)}{t^2} = -\frac{1}{t^3}$ $\quad t\in]0,+\infty[$

on a $a(t) = (\frac{1}{t^2})$ et $f(t)=(-\frac{1}{t^3})$ et $t_0=1$

On utilise la formule de duhamel $\qquad (\frac{1}{t})' = -\frac{1}{t^2}$

$$y(t) = e^{\int_1^t -\frac{1}{s^2}ds} + \int_1^t e^{\int_s^t -\frac{1}{\sigma^2}d\sigma}\left(-\frac{1}{s^3}\right)ds$$

$$= e^{[\frac{1}{s}]_1^t} + \int_1^t e^{[\frac{1}{\sigma}]_s^t}\left(-\frac{1}{s^3}\right)ds$$

$$= e^{\frac1t -1} - \int_1^t e^{\frac1t-\frac1s}\frac{1}{s^3}ds = e^{\frac1t}\left(e^{-1} - \int_1^t e^{-\frac1s}\frac{1}{s^3}ds\right)$$

On veut calculer $-\int_1^t \frac{e^{-\frac1s}}{s^3}ds = \int_1^t \frac{e^{-\frac1s}}{s}\cdot -\frac{1}{s^2}ds$ $\qquad u=\frac1s$, $du = -\frac{1}{s^2}ds$

$$=\int_1^{\frac1t} ue^{-u}du \overset{IPP}{=} [-ue^{-u}]_1^{\frac1t} + \int_1^{\frac1t} e^{-u}du = e^{-1} - \frac1t e^{-\frac1t} + e^{-1} - e^{-\frac1t}$$

Donc $y(t) = e^{\frac1t}(3e^{-1} - \frac1t e^{-\frac1t} - e^{-\frac1t}) = 3e^{\frac1t -1} - \frac1t - 1$

b) i) $(1-t^2)y'(t)+ty(t)=3t$ $\quad t\in\mathbb{R}$ $\qquad$ on résoud sur les intégrales réguliers $J_1=]-\infty,-1[$, $J_2=]-1,+1[$, $J_3=]1,+\infty[$

On suppose $t\neq\pm1$

$$y'(t)+\frac{t}{1-t^2}y(t) = \frac{3t}{1-t^2}$$

On cherche $y(t)=y_h(t)+y_p(t)$ avec $y_h(t)$ solution homogène de l'équation $y'(t)+\frac{t}{1-t^2}y(t)=0$

$$y_h(t) = Ce^{-\int_{t_0}^t \frac{s}{1-s^2}ds}$$

et y_p solution particulière tel que $y_p'(t)+\frac{t}{1-t^2}y_p(t)=\frac{3t}{1-t^2}$

ou $y_p(t) = C(t)e^{-\int_{t_0}^t\frac{s}{1-s^2}ds}$

$\Leftrightarrow$ $y_p'(t) = C'(t)e^{-\int_{t_0}^t\frac{s}{1-s^2}ds} - \frac{t}{1-t^2}C(t)e^{-\int_{t_0}^t\frac{s}{1-s^2}ds}$

$$C'(t)e^{-\int_{t_0}^t\frac{s}{1-s^2}ds} - \cancel{\frac{t}{1-t^2}C(t)e^{-\int_{t_0}^t s\,ds}} + \cancel{\frac{t}{1-t^2}C(t)e^{-\int_{t_0}^t s\,ds}} = \frac{3t}{1-t^2}$$

$$\Rightarrow C'(t) = \frac{3t}{1-t^2} e^{\int_{t_0}^{t} \frac{s}{1-s^2} ds}$$

$$= \frac{3t}{1-t^2} e^{-\frac{1}{2} \ln |1-t^2|}$$

$$\int^t \frac{s}{1-s^2} ds = -\frac{1}{2} \int^t \frac{-2s}{1-s^2} ds$$

$$= -\frac{1}{2} \ln |1-t^2|$$

3 solut° particulière

Sur J_1 : $y_1(t) = C_1 e^{\frac{1}{2}\ln(t^2-1)} + 3 = C_1 \sqrt{t^2-1} + 3 \quad C_1 \in \mathbb{R}$

Sur J_2 : $y_2(t) = C_2 \sqrt{1-t^2} + 3, \quad C_2 \in \mathbb{R}$

Sur J_3 $\quad y_3(t) = C_3 \sqrt{t^2-1} + 3 \quad C_3 \in \mathbb{R}$

Soit J intervalle tq $J \subset J_2 \cup J_3$

. $y : J \to \mathbb{R}$ est solution

ssi
1) $y \in C^1(J, \mathbb{R})$
2) y sol° sur $J \cap J_2$
3) y solution sur $J \cap J_3$

(2) $\Rightarrow \exists C_2 \in \mathbb{R}$ tq $\forall t \in J \cap J_2 \; y(t) = y_2(t) = C_2 \sqrt{1-t^2} + 3$

(3) $\Rightarrow \exists C_3 \in \mathbb{R}$ tq $\forall t \in J \cap J_3 \; y(t) = y_3(t) = C_3 \sqrt{t^2-1} + 3$

(1) $\Rightarrow \begin{cases} y \text{ continue en } t=1 \\ y' \text{ défini et continue en } t=1 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} \lim_{t \to 1^-} y_2(t) \text{ et } \lim_{t \to 1^+} y_3(t) \text{ existent et sont égales} & (1') \\ \lim_{t \to 1^-} y_2'(t) \text{ et } \lim_{t \to 1^+} y_3'(t) \text{ existent et sont égales.} & (2') \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} (1') \text{ vrai } \forall C_1; C_2; C_3 \\ (2') \; y_2'(t) = -C_2 \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} \; , \; y_3'(t) = C_3 \frac{t}{\sqrt{t^2-1}} \end{cases}$ $\quad$ (2') vrai ssi $C_2 = C_3 = 0$

Donc la seule solution sur J est $y \equiv 3$.

Idem sur tous les autres intervalles $\neq$ de J_1, J_2, J_3 ; en particulier, la seule solution globale sur $\mathbb{R}$ est $y=3$.

ii) $(\sin t)y'(t) + (\cos t)y(t) = 1 \qquad t \in]-\pi, \pi[$

On a un soucis en 0 car $\sin(0) = 0$

On résoud donc sur les intervalles $I_1 =]-\pi, 0[$ et $I_2 =]0, \pi$

- $y'(t) + \frac{\cos(t)}{\sin(t)} y(t) = \frac{1}{\sin(t)}$

- solution homogène $y_h(t)$ de $y'(t) + \frac{\cos(t)}{\sin(t)} y(t) = 0$

sur I_1 $\quad y_h(t) = C_1 e^{-\int^t \frac{\cos(s)}{\sin(s)} ds}$

sur I_2 $\quad y_h(t) = C_2 e^{-\int^t \frac{\cos(s)}{\sin(s)} ds}$

on calcule $\int^t \frac{\cos(s)}{\sin(s)} ds = \ln(\sin(t))$

sur I_1 $\quad y_h(t) = C_1 e^{-\ln(|\sin(t)|)} = C_1 \times \frac{1}{-\sin(t)}$

sur I_2 $\quad y_h(t) = C_2 e^{-\ln(|\sin(t)|)} = C_2 \times \frac{1}{\sin(t)}$

on peut enlever $|.|$ vu qu'on reste du m̂ signe

On cherche une solut° particulière y_p sur I_1 tel que $y_p' + \frac{\cos(t)}{\sin(t)} y_p(t) = \frac{1}{\sin}$

où $y_p = C_1(t) \times \frac{1}{-\sin(t)}$

$$y_p' = \frac{-C_1'(t)|\sin(t)| + C_1(t)|\cos(t)|}{\sin(t)^2}$$

$$\frac{-C_1'(t)\sin(t) + C_1(t)\cos(t)}{\sin(t)^2} - \frac{\cos C_1(t)}{\sin(t)^2} = \frac{1}{-\sin(t)} = -\frac{C_1'(t)\sin(t)}{\sin(t)^2}$$

$$C_1'(t) = -1 \qquad C_1(t) = -t$$

On a donc $y_1 = -\frac{C_1}{\sin(t)} + \frac{t}{\sin(t)}$

sur I_2 $y_p = C_2(t) \times \frac{1}{\sin(t)}$ vérifiant $y_p' + \frac{\cos}{\sin} y_p = \frac{1}{\sin}$

$$y_p' = \frac{C_2'(t)\sin(t) - C_2\cos(t)}{\sin^2}$$

$$\frac{C_2'(t)\sin(t) - \cancel{C_2\cos(t)}}{\sin^2} + \frac{\cancel{\cos \times C_2}}{\sin^2} = \frac{1}{\sin}$$

$C_2'(t) = 1$ $\qquad C_2(t) = t$

$$\Rightarrow y_2(t) = \frac{C_2}{\sin(t)} + \frac{t}{\sin(t)}$$

Soit J intervalle dans $I_1 \cup I_2$

$y : J \to]-\pi, \pi[$ est solution ssi

1) $y \in \mathcal{D}^1(J, \mathbb{R})$ (dérivable

2) y sol sur $J \cap I_1$

3) y sol sur $J \cap I_2$

2) $\Rightarrow \exists C_1 \in \mathbb{R}$ tq $\forall t \in J \cap I_1$ tq $y(t) = y_1(t) = -\frac{C_1 + t}{\sin(t)}$

3) $\Rightarrow \exists C_2 \in \mathbb{R}$ tq $\forall t \in J \cap I_2$ tq $y(t) = y_2(t) = \frac{C_2 + t}{\sin(t)}$

1) $\Rightarrow \begin{cases} y \text{ continue en } t=0 \\ y' \text{ défini et continue en } t=0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} \lim_{t \to 0^-} y_1(t) \text{ et } \lim_{t \to 0^+} y_2(t) \text{ existent et sont égales} \\ \lim_{t \to 0^-} y_1'(t) \text{ et } \lim_{t \to 0^+} y_2'(t) \text{ existent et sont égales} \end{cases}$

$\Rightarrow$ $\lim_{t \to 0^-} y_1(t)$ et $\lim_{t \to 0^+} y_2(t)$ existent ssi $C_1 = C_2 = 0$

Donc la seule solution possible sur $]-\pi, \pi[$ est $y \equiv \frac{t}{\sin t}$
et $y(0) = 1$

vérifions que y est C^1 $\underset{\text{soit } \neq 0}{\vee}$ $\lim_{t \to 0} \frac{y(t) - y(0)}{t - 0} = \lim_{t \to 0} \frac{\frac{t}{\sin(t)} - 1}{t} = \lim \frac{\frac{t - \sin(t)}{\sin(t)}}{t}$

$= \lim \frac{t - \sin(t)}{t\sin(t)} \sim \lim_{t \to 0} \frac{t}{6} = 0$ Par conséquent $y(t)$ est dérivable en 0.

Si $t \neq 0$

$$y'(t) = \frac{1}{\sin(t)} - \frac{t\cos t}{\sin^2 t} = \frac{\sin t - t\cos t}{\sin^2 t} \sim \frac{-\frac{t^3}{6} + \frac{t^3}{2}}{t^2} = \frac{-3t^3 + t^3}{6t^2} = \frac{-2t}{3}$$

$\sin t = t - \frac{t^3}{6} + o(t^3)$ | $y'(0)$ existe et vaut 0

$t\cos t = t - \frac{t^3}{2} + o(t^3)$ | $y'(t)$ est continue sur J donc y est C^1 sur J

La solution $y(t) = \begin{cases} \frac{t}{\sin t}, & t \neq 0 \\ 1, & t = 0 \end{cases}$ peut être étendu à tout l'intervalle $]-\pi, \pi[$.

Exercice 3 : $a, b, c \in \mathbb{R}$ $a \neq 0$.

1. a) (H) $ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0$ $t \in \mathbb{R}$

Soit S_H l'ensemble des solution de H

Mq S_H ssev de $C^2(\mathbb{R})$.

- $0 \in S_H$ en effet $a \times 0 + b \times 0 + c \times 0 = 0$ ✓
- Soit $x, y \in S_H$ mq $x + \lambda y \in S_H$, $\lambda \in \mathbb{R}$

$$a(x+\lambda y)'' + b(x+\lambda y)' + c(x+\lambda y) = a(x' + \lambda y')' + b(x' + \lambda y') + c(x + \lambda y)$$

$$\underbrace{ax'' + bx' + cx}_{=0} + \lambda(\underbrace{ay'' + by' + cy}_{=0}) = 0$$

D'où $x + \lambda y \in S_H$.

S_H est donc un sous-espace vectoriel de $C^2(\mathbb{R})$

b) $\forall t_0 \in \mathbb{R}$ et tout couple $(y_0, y_0') \in \mathbb{R}^2$, $\exists!$ sol° y de (H) sur $\mathbb{R}$ qui vérifie $y(t_0) = y_0$ et $y'(t_0) = y_0'$

$$\Phi_{t_0} \begin{cases} S_H \to \mathbb{R}^2 \\ y \to (y(t_0), y'(t_0)) \end{cases}$$

Φ_{t_0} est linéaire et bijective donc $\dim S_H = \dim \mathbb{R}^2 = 2$

c) $y(t) = e^{rt}$ avec $r \in \mathbb{C}$

y solution ssi $ar^2e^{rt} + bre^{rt} + ce^{rt} = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$

ssi $ar^2 + br + c = 0$ (E.C) (équation caractéristique)

d) On cherche r reel ~~solution~~ solution de $ar^2 + br + c = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$ On distingue trois cas:

(1) Soit $\Delta > 0$ alors $r = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $r \in \mathbb{R}$

(2) Soit $\Delta = 0$ alors $r = \dfrac{-b}{2a}$ et $r \in \mathbb{R}$

(3) Soit $\Delta < 0$ alors $r = \dfrac{-b \pm i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$ et $r \in \mathbb{C}$.

(1) On a donc $\left(e^{\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}x}, e^{\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}x}\right)$ qui est une base de S_H.

(2) On a $\left(e^{-\frac{b}{2a}x}, xe^{-\frac{b}{2a}x}\right)$ base de S_H.

$$\left(xe^{-\frac{b}{2a}x}\right)' = e^{-\frac{b}{2a}x} + x\left(-\frac{b}{2a}e^{-\frac{b}{2a}x}\right)$$

$$\left(xe^{-\frac{b}{2a}x}\right)'' = -\frac{b}{2a}e^{-\frac{b}{2a}x} - \frac{b}{2a}e^{-\frac{b}{2a}x} + x\frac{b^2}{4a^2}e^{-\frac{b}{2a}x}$$

$$-be^{-\frac{b}{2a}x} + x\frac{b^2}{4a}e^{-\frac{b}{2a}x} + be^{-\frac{b}{2a}x} - x\frac{b^2}{2a}e^{-\frac{b}{2a}x} + cxe^{-\frac{b}{2a}x}$$

$$= xe^{-\frac{b}{2a}x}\left(\frac{b^2}{4a} - \underbrace{\frac{b^2}{2a}}_{=\frac{2b^2}{4a}} + \underbrace{c}_{=\frac{4ac}{4a}}\right) = xe^{-\frac{b}{2a}x}\left(\frac{-b^2+4ac}{4a}\right) = -xe^{-\frac{b}{2a}x}\left(\overbrace{\frac{b^2-4ac}{4a}}^{=0 \text{ car } \Delta =}\right)$$

(3) On fait passer la base complexe $\left(e^{\frac{-b-i\sqrt{|\Delta|}}{2a}x}, e^{\frac{-b+i\sqrt{|\Delta|}}{2a}x}\right)$ $\quad (\alpha + i\beta)t \quad (\alpha - i\beta t)$

en une base de $\mathbb{R}$.

$$e^{\left(-\frac{b}{2a} - \frac{i\sqrt{|\Delta|}}{2a}\right)x} = e^{-\frac{b}{2a}x}\left(\cos -\frac{\sqrt{|\Delta|}}{2a}x + i\sin\left(-\frac{\sqrt{|\Delta|}}{2a}\right)\right) = e^{-\frac{b}{2a}x}\left(\cos\frac{\sqrt{|\Delta|}}{2a}x - i\sin\frac{\sqrt{|\Delta|}}{2a}\right.$$

$$e^{\left(-\frac{b}{2a} + \frac{i\sqrt{|\Delta|}}{2a}\right)x} = e^{-\frac{b}{2a}x}\left(\cos\frac{\sqrt{|\Delta|}}{2a} + i\sin\left(\frac{\sqrt{|\Delta|}}{2a}\right)\right)$$

$$e^{-\frac{b}{2a}x}\left(\begin{pmatrix}\cos \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}x \\ \cos\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}x\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-\sin\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \\ \sin\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\end{pmatrix}\right)$$ est une base de SH

$\frac{e^{r_1}+e^{r_2}}{2}$ pour y_1 réel $\quad \frac{e^{r_1}-e^{r_2}}{2i}$ pour y_2 réel

2.(a) $(E)\quad ay''(t)+by'(t)+cy(t)=f(t) \quad t\in I$

$S_E = \{\text{solutions de } E\}$

Soit $y_E \in S_E$. On suppose qu'il existe $y_H \in S_H$ tel que :

$\forall y,\ y = y_E + y_H$.

$ay''+by'+cy = a(y_E+y_H)''+b(y_E+y_H)'+c(y_E+y_H)$

$= \underbrace{ay_E''+by_E'+cy_E}_{=f(t)} + \underbrace{ay_H''+by_H'+cy_H}_{=0} = f(t)$.

On connait pas encore y_H ! Il faut montrer que $y-y_E \in S_H$. Soit y solution de E. On pose $h=y-y_E$

$a(y-y_E)''+b(y-y_E)'+c(y-y_E) = ay''+by'+cy-ay_E''-by_E'-cy_E$

$= f(t)-f(t) = 0 = ah''+bh'+ch$ donc $\exists\, y_H$ tq $y = y_E+y_H$.

b) Soit (y_1,y_2) une base de $C^1(I,\mathbb{R})$ tq $\forall t\in I$

$$\begin{cases}\lambda'(t)y_1(t)+\mu'(t)y_2(t)=0\\ \lambda'(t)y_1'(t)+\mu'(t)y_2'(t)=\frac{f(t)}{a}\end{cases}$$

Mq $y=\lambda(t)y_1(t)+\mu(t)y_2(t)$ solution

y_1 solution $\Rightarrow \lambda y_1$ solution

y_2 solution $\Rightarrow \mu y_2$ solution

On fait varier la constante.

$(\lambda(t)y_1(t))' = \lambda'(t)y_1(t)+y_1'(t)\lambda(t)$

$(\lambda(t)y_1(t))'' = \lambda''(t)y_1(t)+\lambda'(t)y_1'(t)+y_1''(t)\lambda(t)+y_1'(t)\lambda'(t)$

$y'(t) = \lambda'(t)y_1(t)+y_1'(t)\lambda(t)+\mu'(t)y_2(t)+\mu(t)y_2'(t) = y_1'(t)\lambda(t)+\mu(t)y_2'(t)$

$y''(t) = y_1''(t)\lambda(t)+y_1'(t)\lambda'(t)+\mu'(t)y_2'(t)+\mu(t)y_2''(t) = y_1''(t)\lambda(t)+\mu(t)y_2''(t)+\frac{f(t)}{a}$

$\Rightarrow y(t)$ solution ssi $a\left(y_1''(t)\lambda(t)+\mu(t)y_2''(t)+\underline{f(t)}_{a}\right)+b\left(y_1'(\lambda(t))+y_2'\mu(t)\right)$
$+c\left(\lambda(t)y_1(t)+\mu(t)y_2(t)\right)=f(t)$

$$\Leftrightarrow \lambda(t)\underbrace{\left[a y_1''(t)+b y_1'(t)+c y_1(t)\right]}_{=0}+\mu(t)\underbrace{\left[a y_2''+b y_2'+c y_2\right]}_{=0}+\cancel{a}\frac{f(t)}{\cancel{a}}=f(t)$$

(y_1, y_2) est bien solution de (E)

3. Exemple : (3) $y''(t)-y(t)=f(t) \quad t\in I$

(a) $a=1$; $b=0$; $c=-1 \qquad \Delta=4 \qquad r=\frac{\pm 2}{2}=\pm 1$

La base de solution de $y''(t)-y(t)=0$ est (e^{-t}, e^{t})

D'après (b) on a $y(t)=\lambda(t)e^{-t}+\mu(t)e^{t}$ solution de (3)

$\sinh(t)=\frac{e^{t}-e^{-t}}{2}$

On a que $y=y_E+y_H$ où $y_H=\lambda e^{t}+\mu e^{-t}$

et $y_E=\lambda(t)e^{t}+\mu(t)e^{-t}$

Cherchons $\lambda(t)$ et $\mu(t)$ tq

$$\begin{cases}\lambda'(t)e^{t}+\mu'(t)e^{-t}=0\\ \lambda'(t)e^{t}-\mu'(t)e^{-t}=f(t)\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}2\lambda'(t)e^{t}=f(t) \Rightarrow \lambda'(t)=\frac{f(t)e^{-t}}{2}\\ 2\mu'(t)e^{-t}=-f(t) \Rightarrow \mu'(t)=-\frac{f(t)e^{t}}{2}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\lambda(t)=\int_{t_0}^{t}\frac{e^{-s}}{2}f(s)\,ds\\ \mu(t)=-\int_{t_0}^{t}\frac{e^{s}}{2}f(s)\,ds\end{cases}$$

$y_E(t)=\lambda(t)e^{t}+\mu(t)e^{-t}=e^{t}\int_{t_0}^{t}\frac{e^{-s}}{2}f(s)\,ds-e^{-t}\int_{t_0}^{t}\frac{e^{s}}{2}f(s)\,ds$
$=\int^{t}\frac{e^{t-s}}{2}f(s)\,ds-\int^{t}\frac{e^{s-t}}{2}f(s)\,ds=\int^{t}\frac{e^{t-s}-e^{-(t-s)}}{2}f(s)\,ds=\int^{t}\operatorname{sh}(t-s)f(s)\,ds$

En additionnant $y_H + y_E$ on a

$$y(t) = \lambda e^{t-t_0} + \mu e^{-(t-t_0)} + \int_{t_0}^{t} sh(t-s) f(s)\, ds \quad \lambda,\mu \in \mathbb{R} \quad t_0 \in I.$$

b) $\boxed{\Rightarrow}$ On suppose y solution de (3)

alors $y(t)$ de la forme $y(t) = \lambda e^{t-t_0} + \mu e^{-(t-t_0)} + \int_{t_0}^{t} sh(t-s) f(s)\, ds$

$$\Rightarrow y'(t) = \lambda e^{t-t_0} - \mu e^{-(t-t_0)} + \left(\int_{t_0}^{t} sh(t-s) f(s)\, ds\right)'$$

$$= \lambda e^{t-t_0} - \mu e^{-(t-t_0)} + sh(t-t_0) f(t) + \int_{t_0}^{t} (\cosh(t-s) f(s) + \sinh(t-s) f'(s))\, ds$$

$X = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} \quad X' = \begin{pmatrix} y' \\ y'' \end{pmatrix}$

On fait une réduction d'ordre.

On suppose y solution de (3) $\Rightarrow y'' - y(t) = f(t)$

$\begin{cases} x_1 = y \\ x_2 = y' \end{cases} \quad \begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = y \end{cases}$

$\boxed{\Leftarrow}$ On suppose $X = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$ solution de

$$X'(t) = AX(t) + F(t)$$

$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' - x_1 = f(t) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} y'(t) \\ y''(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} y'(t) \\ y''(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ay(t) + by'(t) \\ cy(t) + dy'(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y'(t) = a\,y(t) + by'(t) + f_1(t) \\ y''(t) = cy(t) + d\,y'(t) + f_2(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y'(t) = \dfrac{ay(t) + f_1(t)}{1-b} \\ y''(t) = cy(t) + dy'(t) + f_2(t) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} y'(t) \\ y''(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix}$$

c) $\chi_A(\lambda) = \lambda^2 - 1 = (\lambda+1)(\lambda-1)$ "χ_A scindé à racines simples" on a 2 v.p distincte A est donc diagonalisable.

$(A - \lambda I)X = 0 \quad \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow x = y \quad E(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow x = -y \quad E(-1) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad P^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

On a $A = PDP^{-1}$ $\quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\left(\frac{1}{2}\right)$

$$e^{tA} = P\, e^{tD} P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\left(\frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} e^{t} & e^{-t} \\ e^{t} & -e^{-t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{t}+e^{-t} & e^{t}-e^{-t} \\ e^{t}-e^{-t} & e^{t}+e^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{pmatrix} \quad \checkmark$$

d) $X'(t) = AX(t) + F(t) \qquad t \in I$

$$\cancel{\begin{cases} y'(t) = ay(t) + by(t) + f_1(t) \\ y''(t) = by(t) + cy(t) + f_2(t) \end{cases}}$$

$$X'(t) = AX(t) + F(t) \Rightarrow X'(t) = PDP^{-1}X(t) + F(t)$$

$$P^{-1}X'(t) = DP^{-1}X(t) + P^{-1}F(t)$$

Posons $Z = P^{-1}X$

$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$

Alors $\quad Z' = DZ + \underset{P^{-1}F}{\underset{\shortparallel}{\overline{F}}}$

$\overline{F} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{cases} z_1' = z_1 + f_1 \\ z_2' = z_2 + f_2 \end{cases} \qquad \text{bien indépendants}$$

$$\text{Duhamel} \begin{cases} z_1(t) = e^{t-t_0} z_1(0) + \int_{t_0}^{t} e^{t-s} f_1(s)\,ds \\ z_2(t) = e^{t-t_0} z_2(0) + \int_{t_0}^{t} e^{-(t-s)} f_2(s)\,ds \end{cases}$$

e) $$z(t) = \begin{pmatrix} e^{t-t_0} & 0 \\ 0 & e^{-(t-t_0)} \end{pmatrix} z(0) + \int_{t_0}^{t} \begin{pmatrix} e^{t-s} & 0 \\ 0 & e^{-(t-s)} \end{pmatrix} \overline{F}(s)\,ds$$

$$z(t) = e^{(t-t_0)D} z_0 + \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)D}\, \overline{F}(s)\,ds$$

$$X(t) = P e^{(t-t_0)D} P^{-1} X(0) + \int_{t_0}^{t} P\, e^{(t-s)D} P^{-1} F(s)$$

$$X(t) = \left(e^{(t-t_0)A}\right) X_0 + \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)A} F(s)\,ds.$$

e) y est la première composante de X

$$y(t) = ch(t-t_0)y_0 + sh(t-t_0)y_0' + \int_{t_0}^{t} ch(t-s)\cdot 0 + sh(t-s) f(s)\,ds$$

$$= \frac{y_0 + y_0'}{2} e^{(t-t_0)} + \frac{y_0 - y_0'}{2} e^{-(t-t_0)} + \int_{t_0}^{t} sh(t-s) f(s)\,ds$$

Exercice 4: $b(x)$ $\qquad$ $b(x)y'(t) = a(t)$

a) $y(t)y'(t) = -t \quad t \in \mathbb{R}$ $\qquad$ $y(1) = 3$

on $b(x) = x(t) \quad a(t) = -t$ $\qquad$ $\frac{1}{2} \times 9 = -\frac{1}{2} \times 1 + C$

$\frac{9}{2} = -\frac{1}{2} + C \Rightarrow C = 5$

1. x est dérivable sur I

2. $\exists c$ tq $B(x(t)) = A(t) + c \quad \forall t \in$ A primitive de a sur J B primitive de

$B(x(t)) = \int x(t)dx = \frac{1}{2}x^2(t) \qquad A(t) = -\frac{1}{2}t^2 + C$ $\qquad$ $-\frac{1}{2}t^2 + c < 0$ $\quad t^2 \geq 2C$ $\Rightarrow t > \sqrt{2C}$ $\quad t < -\sqrt{2C}$

$\frac{1}{2}x^2(t) = -\frac{1}{2}t^2 + c$ $\qquad$ on a que x n'est pas défini pour $t \in]-\infty; -\sqrt{2C}[\cup]\sqrt{2C}; +\infty[$

$x^2(t) = -t^2 + 2C$

$x(t) = \sqrt{2C - t^2}$

$B(x) = \int b(x) \times dx$?

b) $y'(t) = \frac{1}{t^2} y(t)(y(t) - 1) \qquad t > 0$ $\qquad$ $y^2 - y$

On suppose $y \neq 0, 1$ $\qquad$ $\frac{1}{3}y^3 - \frac{y^2}{2} \qquad y^2\left(\frac{y}{3} - \frac{1}{2}\right)$

$b(x) = \frac{1}{y(t)(y(t)-1)} \qquad a(t) = \frac{1}{t^2}$

$B(x) = \int \frac{1}{y(t)(y(t)-1)} dy = \int X \times \frac{X}{1-X}\left(-\frac{1}{X^2}\right)dx$ $\qquad$ $A(t) = \int \frac{1}{t^2} = -\frac{1}{t}$

$y = \frac{1}{X}$

$dy = -\frac{1}{X^2}dX$ $\qquad$ $= \int \frac{1}{X-1} dX$

$\frac{1}{y-1} = \frac{1}{\frac{1}{X} - \frac{X}{X}} = \frac{X}{1-X}$ $\qquad$ $= \ln|X-1| = \ln\left|\frac{1}{y} - 1\right|$

$\int \frac{1}{y} \times \frac{1}{\frac{1}{y} - 1}$ $\qquad$ $z'(t)$

c) $y'(t) = (y(t) + 3t)^3 - 3 \Rightarrow y' = (y(t)^2 + 6ty(t) + 9t^2)(y(t) + 3t) - 3$

$\Rightarrow y' = y^3 + 6ty^2 + 9t^2y + 3ty^2 + 18t^2y + 18t^3 - 3 = y^3 + 9ty^2 + 27t^2y + 18t^3 - 3$

On pose $z(t) = y(t) + 3t \Rightarrow y'(t) = z'(t) - 3$

$z'(t) = z(t)^3$

$B(z) = \int \frac{1}{z^3} dz =$

Correction :

b). On cherche les solutions constante.

Il y a deux solutions constantes possibles : $y(t) = \bar{y}$

$y'(t) = 0, \forall t > 0 \Rightarrow \bar{y} = 1$ ou $\bar{y} = 0$

Soit $J =]a, b[$ et y solution sur J tq $\forall t \in J$ $y(t) \neq 0$ et $y(t) \neq 1$

y solution sur J ssi $\dfrac{y'(t)}{y(t)(y(t)-1)} = \dfrac{1}{t^2}$ ssi $B(y(t))' = \dfrac{1}{t^2}$

où $B(y)$ est une primitive de $\dfrac{1}{y(y-1)}$

si $B(y) = \int \dfrac{1}{y(y-1)} dy = .. = \ln\left|\dfrac{1}{y} - 1\right|$ est égale à $A(t) = -\dfrac{1}{t}$

ssi $\ln\left|\dfrac{1}{y(t)} - 1\right| = -\dfrac{1}{t} + c$ $c \in \mathbb{R}$ ssi $\left|\dfrac{1}{y(t)} - 1\right| = Ce^{-\frac{1}{t}}$ $C \in \mathbb{R}_+^*$

Or la fonction $t \to \dfrac{1}{y(t)} - 1 = \dfrac{1 - y(t)}{y(t)}$ est continue et $y(t) \neq 0$, $\neq 1$ $\forall t \in J$ donc $\dfrac{1 - y(t)}{y(t)}$

donc $\dfrac{1 - y(t)}{y(t)}$ est de signe constant sur J.

- si $\dfrac{1-y}{y} > 0$: $\dfrac{1}{y(t)} - 1 = ce^{-\frac{1}{t}}$; $c \in \mathbb{R}_+^*$ $\Leftrightarrow \dfrac{1}{y(t)} = ce^{-\frac{1}{t}} + 1 \Leftrightarrow y(t) = \dfrac{1}{ce^{-\frac{1}{t}} + 1}$; $c \in \mathbb{R}$
- si $\dfrac{1-y}{y} < 0$: $y(t) = \dfrac{-1}{ce^{-\frac{1}{t}} - 1} = \dfrac{1}{1 - ce^{-\frac{1}{t}}}$ avec $c \in \mathbb{R}_+^*$

Dans tous les cas, si y solution sur $J =]a, b[$ tq $y \neq 0$ et $y \neq 1$ sur J, alors $\exists\, c \in \mathbb{R}^*$ tq $y(t) = \dfrac{1}{1 - ce^{-\frac{1}{t}}}$ $t \in]a, b[$

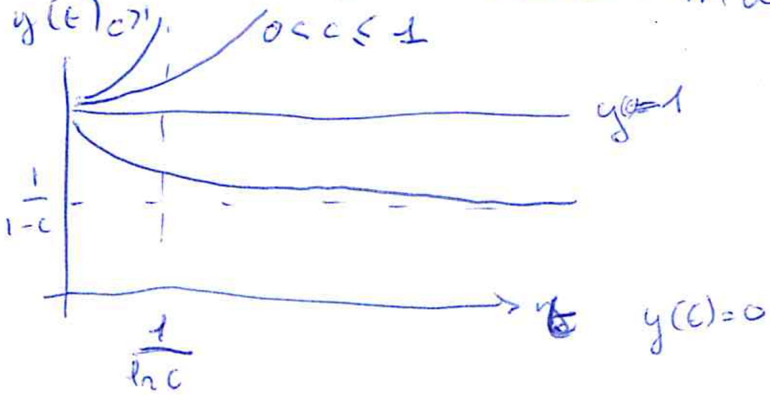
Pour chaque $c \in \mathbb{R}^*$, on cherche l'intervalle le plus grand sur lequel y est défini. Cherchons t, tq $1 - ce^{-\frac{1}{t}} = 0 \Rightarrow e^{-\frac{1}{t}} = \dfrac{1}{c}$

- On voit que si $c < 0$, y est défini sur $\mathbb{R}_+^*$, c'est une solution globale
- si $c > 0$ alors $-\dfrac{1}{t} = \ln\dfrac{1}{c} \Rightarrow \dfrac{1}{t} = -\ln\dfrac{1}{c}$ or $\ln 1 = 0$

On suppose $c>1$, $\exists\, \bar{t}>0$ tq $1-ce^{-\frac{1}{\bar{t}}}=0$, $\bar{t}=\frac{1}{\ln c}$

Dans ce cas, la solution maximale est définie sur $]0,\frac{1}{\ln c}[$.

Si $0<c\leq 1$, la solution maximale est globale



$y(1)=3 \Leftrightarrow y(1)=\frac{1}{1-ce^{-1}}=3 \Leftrightarrow 1-ce^{-1}=\frac{1}{3} \Leftrightarrow ce^{-1}=\frac{2}{3}$

$\Leftrightarrow c=\frac{2e}{3}>1$ Donc l'unique solution vérifiant $y(1)=3$ est donnée par $y(t)=\dfrac{1}{1-\frac{2e}{3}e^{-\frac{1}{t}}}$ définie sur $]0,\frac{1}{\ln\frac{2}{3}+1}[$

b) $y'(t)=(y(t)+3t)^3$, $t\in\mathbb{R}$ $(\mathcal{E})$

Posons $z(t)=y(t)+3t$

alors $z'(t)=y'(t)+3$

y est solution de $(\mathcal{E})$ ssi z solution de $(\mathcal{E}')$ $z'(t)=z^3(t)$

* solutions stationnaires : $z\equiv 0$
* Soit $J=]a,b[$ et z solution par J tq $z\neq 0$ sur J. alors

z vérifie $\frac{z'}{z^3}=1 \Leftrightarrow \left(\frac{-1}{2z^2(t)}\right)'=1 \Leftrightarrow \exists c\in\mathbb{R},\ \frac{1}{z^2(t)}=2(c-t)$

$\Leftrightarrow z^2=\frac{1}{2(c-t)}$, $t<c$

Les solutions de $(\mathcal{E}')$ non nul sont $z(t)=\pm\sqrt{\frac{1}{2(c-t)}}$ défini sur $]-\infty,c[$

Les solutions de $(\mathcal{E})$ sont. $\cdot\ y(t)=-3t$ sur $\mathbb{R}$

* $y(t) = \frac{1}{\sqrt{2(c-t)}} - 3t$ sur $]-\infty, c[$

* $y(t) = -3t - \frac{1}{\sqrt{2(c-t)}}$ sur $]-\infty, c[$

Si $y(1) = 3$

$\exists\, c \in \mathbb{R}$ tq $y(t) = -3t + \frac{1}{\sqrt{2}(c-t)}$ sur $]-\infty, c[$

avec $3 = -3 + \frac{1}{\sqrt{2(c-1)}}$ $\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2(c-1)}} = 6 \Rightarrow \sqrt{2(c-1)} = \frac{1}{6}$

$2(c-1) = \frac{1}{36} \Rightarrow c - 1 = \frac{1}{72} \Rightarrow c = \frac{73}{72}$

Exercice 5.

(a) $\frac{dy}{dx} + y = \frac{1}{y^2} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} + y - y^{-2} = 0$

y est solution de (a) ssi $u = y^{1-r}$ est solution de $u' + (1-r)P(x)u + (1-r)Q(x) = 0$ où $r = -2$ $P(x) = 1$ et $Q(x) = -1$.

On cherche donc u solution de $u' + 3u - 3 = 0$

u est de la forme $u_H + u_p$ où u_H sol de $u' + 3u = 0$

$\Rightarrow u_H = u_0 e^{-3x}$ et u_p solution particulière de $u' + 3u - 3 = 0$

. $u_p = 1$ est une solution particulière.

On peut prendre $u = u_0 e^{-3x} + 1$

on a donc $y = \sqrt[3]{u_0 e^{-3x} + 1}$

. cette solution est défini sur $\mathbb{R}$ si $c > 0$

. si $c < 0$ $ce^{-3x} = -1 \Rightarrow e^{-3x} = \frac{1}{-c} \Rightarrow t = -\frac{\ln(\frac{1}{c})}{3}$

la solution est définie $]-\infty ; -\frac{\ln(\frac{1}{c})}{3}[$, $]-\frac{\ln(\frac{1}{c})}{3} ; +\infty[$.

(b) $\frac{dy}{dx} = y(xy^3 - 1) = xy^4 - y \Rightarrow \frac{dy}{dx} + y - xy^4 = 0$

y est solution de (b) ssi $u = y^{(1-r)}$ est solution de

$$u' + (1-r)P(x)u + (1-r)Q(x) = 0$$

où $r = 4$, $P(x) = 1$ et $Q(x) = -x$

On cherche donc u solution de $u' - 3u + 3x = 0$ de la forme $u = u_H + u_p$ où u_H est solut° homogène de $u' - 3u = 0$;

on peut prendre $u_H = u_0 e^{3x}$; et u_p est solution particulière de (b) de la forme $u_p = C(x)e^{3x}$ telle que $u_p' - 3u_p = -3x$

c.à.d $C'(x)e^{3x} + \cancel{3C(x)e^{3x}} - \cancel{3C(x)e^{3x}} = -3x$

et $C'(x) = -3xe^{-3x} \Rightarrow C(x) = \int -3xe^{-3x}dx = xe^{-3x} - \int e^{-3x}dx$

$= xe^{-3x} + \frac{e^{-3x}}{3} = e^{-3x}\left(x + \frac{1}{3}\right)$ On peut prendre $u_p = \underbrace{e^{3x}e^{-3x}}_{=1}\left(x + \frac{1}{3}\right)$

On peut donc prendre $u = u_0 e^{3x} + x + \frac{1}{3}$

et donc $y = \left(u_0 e^{3x} + x + \frac{1}{3}\right)^{-\frac{1}{4}}$

Exercice 6 $\frac{dy}{dx} = P(x) + Q(x)y + R(x)y^2$

1. On fait un premier changement de variable

$$\frac{d(y_1 + u)}{dx} = P(x) + Q(x)(y_1 + u) + R(x)(y_1 + u)^2$$

$$\frac{dy_1}{dx} + \frac{du}{dx} = \cancel{P(x)} + \cancel{Q(x)y_1} + Q(x)u + \cancel{R(x)y_1^2} + 2R(x)y_1 u + R(x)u^2$$

car y_1 sol particulière

$\Rightarrow \frac{du}{dx} = Q_1(x)u + R(x)u^2$ où $Q_1(x) = Q(x) + 2R(x)y_1$

On cherche u solution de cette équation cette équation, on calcule ensuite y et c'est terminé.

2. $$\frac{dy}{dx} = -\frac{4}{x^2} - \frac{1}{x}y + y^2 \quad (E)$$

Soit y_1 solution particulière de (E) posons $y = y_1 + u$. On identifie $P(x) = -\frac{4}{x^2}$ $Q(x) = -\frac{1}{x}$ et $R(x) = 1$

et on peut prendre $y_1 = -\frac{2}{X}$

On résoud donc $$\frac{du}{dx} = \left(-\frac{1}{X} - \frac{4}{X}\right)u + u^2 = -\frac{5}{X}u + u^2$$

$$\Rightarrow u' + \frac{5}{X}u - u^2 = 0$$

On pose $z = u^{1-r} = \frac{1}{u}$ solution de

$$z' + (1-r)P_2(x) + (1-r)Q_2(x) = 0$$

où $r = 2$ $P_2(x) = \frac{5}{X}$ et $Q_2(x) = -1$

On cherche donc $z = z_h + z_p$ sol de $z' - \frac{5}{X}z + 1 = 0$

où z_h sol hom. de $z_h' - \frac{5}{X}z_h = 0$. On peut prendre $z_h = z_0 e^{5\ln X}$ et z_p sol particulière. On peut prendre $z_p = \frac{X}{4}$

On peut donc prendre $z = z_0 e^{5\ln X} + \frac{X}{4}$

$$\Rightarrow u = \left(z_0 e^{5\ln X} + \frac{X}{4}\right)^{-1}$$

$$\Rightarrow y = -\frac{2}{X} + \frac{1}{z_0 e^{5\ln X} + \frac{X}{4}}$$

Exercice 7.

1 $\quad (x^2-1)\dfrac{dy}{dx} + 2xy = 0 \iff (x^2-1)dy + 2xy\,dx = 0$

Posons $b(x,y) = x^2-1$ et $a(x,y) = 2xy$

$\dfrac{\partial a}{\partial y} = 2x$ et $\dfrac{\partial b}{\partial x} = 2x$ on $\dfrac{\partial a}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial b}{\partial t}$ qui existent

sont continues et $\dfrac{\partial a}{\partial y} = \dfrac{\partial b}{\partial x}$ donc $f(x,y) = 2xy\,dx + (x^2-1)dy$

est aux différentielles totales.

2. $y(1-x^2)y'(x) = xy^2 - \sin x \cos x. \quad (1)$

$(1) \iff \omega(x,y) = 0$

Avec $\omega(x,y) = \underbrace{(-xy^2 + \sin x \cos x)}_{a(x,y)}dx + \underbrace{y(1-x^2)}_{b(x,y)}dy$

$\dfrac{\partial a(x,y)}{\partial y} = -2xy \qquad \dfrac{\partial b}{\partial x} = -2xy$

ω fermé sur $\mathbb{R}^2$ donc $\omega(x,y)$ est aux différentielles totales.

$\exists\, f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tq $df = \omega$

On intègre $a(x,y)$ suivant x.

$$\int -xy^2 + \sin x \cos x\,dx = -\frac{1}{2}x^2y^2 - \frac{1}{2}\cos^2 x = -\frac{1}{2}(x^2y^2 + \cos^2 x) + C(y)$$

On dérive en f° de y.

$-x^2y + C'(y) = y - yx^2 \Rightarrow C'(y) = y \Rightarrow C(y) = \frac{1}{2}y^2 + C$

On peut prendre :

$f(x,y) = -\frac{1}{2}(x^2y^2 + \cos^2 x) + \frac{1}{2}y^2 = -\frac{1}{2}(y^2(1-x^2) + \cos^2 x)$

~~Exercice 8~~ $df(x,y)=0 \Rightarrow \exists\, C\in\mathbb{R}$ tq $f(x,y)=C$

$\Rightarrow C = \frac{1}{2}\left(y^2(x)(1-x^2) - \cos^2 x\right)$

$$\Rightarrow y^2(x) = \frac{2C+\cos^2 x}{1-x^2}$$

Il faut étudier les signe tq $\longrightarrow$ $\cdot\ 1-x^2 \neq 0$ $\cdot\ y^2(x) > 0$

Exercice 8 : 2) $\underbrace{(2y^2+3x)}_{a(x,y)}dx + \underbrace{2xy}_{b(x,y)}dy = 0$ (1)

$$\frac{\partial a}{\partial y}(x,y) = 4y+3 \qquad \frac{\partial b}{\partial x} = 2y$$

On cherche $\mu(x,y)$ tel que $\omega(x,y) = \mu(x,y)(2y^2+3x)dx + \mu(x,y)2xy\,dy$ soit totale.

$$\Rightarrow \cancel{\frac{\partial\mu(x,y)}{\partial y}\times(4y+3)} \quad \frac{\partial\mu(x,y)}{\partial y}a(x,y) + \frac{\partial a(x,y)}{\partial y}\mu(x,y)$$

$$= \frac{\partial\mu(x,y)}{\partial x}b(x,y) + \frac{\partial b(x,y)}{\partial x}\mu(x,y)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial\mu(x,y)}{\partial y}(2y^2+3x) + \mu(x,y)(4y\cancel{+3}) = \frac{\partial\mu(x,y)}{\partial x}(2xy) + \mu(x,y).2y$$

$$\Leftrightarrow \mu(x,y)2y = \frac{\partial\mu(x,y)}{\partial x}\times 2xy - \frac{\partial\mu(x,y)}{\partial y}(2y^2+3x)$$

On peut prendre $\mu(x,y) = x$

$\omega(x,y) = x(2y^2+3x)dx + x\,2xy\,dy$

y solution de 1 si $\omega(x,y)=0$

$$\int 2x^2y\,dy = x^2y^2 + C(x)$$

$$\frac{\partial(x^2y^2+C(x))}{\partial x} = 2xy^2 + C'(x) = 2xy^2+3x^2$$

$$\Rightarrow C'(x) = 3x^2 \Rightarrow C(x) = x^3$$

On peut prendre

$$f(x,y) = x^2(y^2+x)$$

$$df(x,y) = 0 \Rightarrow \exists\, c \in \mathbb{R} \text{ tq } f(x,y) = c$$

$$\Rightarrow \quad c = x^2y^2 + x^3 \quad \Rightarrow \quad y^2(x) = \frac{c - x^3}{x^2} \qquad \cdot\, x \neq 0 \qquad \cdot\, c - x^3 > 0$$

Exercice 9 : 1. $y' = f\left(\frac{y}{t}\right)$ $(*)$

$y'(t) = tu'(t) + u(t)$, y solution de $(*)$ ssi solution

de $tu'(t) + u(t) = f(u(t))$

on résout laquelle.

Exercice 10 : $x' = \varphi(x)\psi(t)$

1. x solution de (6) si $\dfrac{x'(t)}{\varphi(x(t))} = \psi(t)$ $(*)$

$$\Phi(y) = \int_0^y \frac{1}{\varphi(s)}\,ds \qquad \Psi(y) = \int_0^y \psi(s)\,ds$$

$$(*) = \frac{d}{dt}\Phi(x(t)) = \Psi'(t)$$

donc $\Phi(x(t)) = \Psi(t) + c,\ c \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{y \to -\infty} -\Phi(y) = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{\varphi(y)}\,dy = +\infty \Rightarrow \Phi(y) \xrightarrow[y \to -\infty]{} -\infty$$

$$\ldots \Rightarrow \Phi(y) \xrightarrow[y \to +\infty]{} +\infty$$

De plus Φ est strictement croissante (car $\varphi > 0$)

donc $\Phi : \mathbb{R} \xrightarrow{\text{bijection}} \mathbb{R}$. donc Φ^{-1} existe et

$$x(t) = \Phi^{-1}(\psi(t) + c)$$

Par l'absurde, suppons x définit sur J avec $\bar{t} = \sup J < +\infty$

Donc $x(t) \xrightarrow[t \to \bar{t}]{} \pm\infty$

Or $x(t) \xrightarrow[t \to \bar{t}]{} \Phi^{-1}(\psi(\bar{t}) + c)$ qui est fini absurde.

$\square$

Dons $\sup J = +\infty$ et de même $\inf J = -\infty$

Donc x est une solution globale.

$$x(t) = \Phi^{-1}(\Psi(t) + c)$$

Or a $\lim\limits_{t \to +\infty} \Psi(t) = a \in \mathbb{R}$

et $\lim\limits_{t \to -\infty} \Psi(t) = b \in \mathbb{R}$

$\Big\}$ hypothèse

$a \neq b$ car Ψ strictement croissante

$\lim\limits_{t \to +\infty} x(t) = \Phi^{-1}(a + c)$ et $\lim\limits_{t \to -\infty} x(t) = \Phi^{-1}(b + c)$

on a donc 2 asymptote horizontale