Université Lyon 1

Feuille 2 - Autour du théorème de Cauchy-Lipschitz

Exercice 1. (*Pas d'unicité*)
On considère le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y'(t) = \sqrt{|y(t)|}, & t \in \mathbb{R} \\ y(0) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

1. Construire une solution non nulle au problème (1).
2. Le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique-t-il ici ? Pourquoi ?

Exercice 2. (*Lemme de comparaison*) Soient $f, g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions telles que

$$\forall (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad f(t,x) < g(t,x). \tag{2}$$

1. *Cas Lipschitz :* On suppose que f et g sont des fonctions lipschitziennes sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Soit $(t_0, x_0, y_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. On considère les problèmes de Cauchy suivants :

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \qquad \begin{cases} y'(t) = g(t, y(t)), \\ y(t_0) = y_0. \end{cases} \tag{3}$$

   (a) Justifier qu'il existe deux fonctions $x, y \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ solutions des problèmes de Cauchy (3).
   (b) On suppose que $x_0 = y_0$, montrer que pour tout $t > t_0$, on a $x(t) < y(t)$. Que peut-on dire pour $t < t_0$? *Indication : on pourra étudier la fonction* $w(t) = x(t) - y(t)$.
   (c) Montrer que si l'inégalité (2) est large, alors pout tout $t \geq t_0$, $x(t) \leq y(t)$. Qu'en est-il pour $t \leq t_0$?

2. *Cas continu :* On suppose maintenant que les fonctions f et g sont seulement continues, et qu'il existe un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$, et $x, y \in C^1(I, \mathbb{R})$ solutions des problèmes de Cauchy (3), où $(t_0, x_0, y_0) \in I \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

   (a) Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $t \in]t_0, t_0 + \delta[$, $x(t) < y(t)$. ($x_0 = y_0$)
   (b) En déduire que pour tout $t \in I \cap]t_0, +\infty[$, $x(t) < y(t)$.
   Indication. Considérer

$$J = \{c \in I \,;\, c > t_0, \ \forall t \in]t_0, c[, \ x(t) < y(t)\}$$

   ainsi que $m = \sup J$.
   (c) Quelle relation peut-on écrire pour $t \in I \cap] - \infty, t_0[$?
   (d) Peut-on généraliser au cas continu le résultat de la question 1.(c) ?

Exercice 3. (*Conséquences du théorème des bouts*)
Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, soit $n \geq 1$. Soit $f : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une fonction vérifiant les hypothèses suivantes :
(H1) f continue sur $I \times \mathbb{R}^n$,
(H2) f localement lipschitzienne par rapport à sa deuxième variable, *i.e.* pour tout $(t_1, x_1) \in I \times \mathbb{R}^n$, il existe un voisinage V de (t_1, x_1) dans $I \times \mathbb{R}^n$ et $L > 0$ tels que : pour tout (t,x), $(t,y) \in V$, $\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq L\|x - y\|$.

Soit $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{R}^n$. On considère le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), \ t \in I \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{4}$$

1. Justifier l'existence et l'unicité d'une solution maximale au problème (4), définie sur un intervalle ouvert $J \subset I$: $x \in \mathcal{C}^1(J, \mathbb{R}^n)$.
2. Montrer que si $\sup J < \sup I$ (*i.e. la solution maximale x n'est pas globale*), alors
$$\lim_{t \to \sup J} \|x(t)\| = +\infty.$$
3. Montrer que si la solution maximale $x : J \to \mathbb{R}^n$ est bornée sur J alors $J = I$, *i.e.* la solution est globale.
4. Plus généralement, montrer que si la solution maximale $x : J \to \mathbb{R}^n$ est bornée sur tout intervalle borné inclus dans J, alors elle est globale.
5. *Cas f bornée.* Montrer que si $f : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ vérifie (H1)-(H2) et si de plus f est bornée sur $I \times \mathbb{R}^n$, alors toute solution maximale est globale.
6. *Cas f sous-linéaire.* Montrer que si $f : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ vérifie (H1)-(H2) et si de plus il existe $\lambda, \mu > 0$ tels que
$$\forall t \in I, \forall x \in \mathbb{R}^n, \ \|f(t,x)\| \leq \lambda \|x\| + \mu$$
(où $\|\cdot\|$ est une norme quelconque sur $\mathbb{R}^n$), alors toute solution maximale est globale.

Exercice 4.

Soit $f : \mathbb{R} \times]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \forall x > 0, f(t,x) = -\frac{1}{x}.$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R} \times]0, +\infty[$ et localement lipschitzienne par rapport à sa deuxième variable.
2. Soit $x_0 > 0$. On considère le problème de Cauchy
$$\begin{cases} x'(t) = -\frac{1}{x(t)}, \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{5}$$
3. Calculer explicitement la solution maximale au problème (5). On note $J =]t_*, T^*[$ son intervalle de définition, avec t_* et T^* finis ou infinis.
4. Etudier le comportement de $x(t)$ quand $t \to T^*$. Faire le lien avec le théorème des bouts (ou théorème de sortie de compact) ?

Exercice 5.

On considère l'équation différentielle ordinaire suivante

$$\begin{cases} v'(t) = -v(t)^2, \ t \in \mathbb{R} \\ v(0) \in \mathbb{R} \text{ donné.} \end{cases} \tag{6}$$

1. Montrer que pour toute donnée initiale $v(0)$ l'équation (6) admet une unique solution maximale, définie sur un intervalle de la forme $] - T, T^*[$ où $T, T^* \in]0, +\infty]$.
2. Montrer que si $v(0) \neq 0$ alors la solution correspondante ne s'annule pas sur $] - T, T^*[$.
3. Calculer explicitement cette solution ainsi que T et T^* en fonction de $v(0)$.

Exercice 6.

Pour $y_0 \in \mathbb{R}$, on s'intéresse au problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y'(t) = \sin(y(t)), & t \in \mathbb{R} \\ y(0) = y_0. \end{cases} \tag{7}$$

1. Soit $y_0 \in \mathbb{R}$. Montrer que le problème (7) admet une unique solution maximale y. Montrer que cette solution est globale, *i.e.* définie sur $\mathbb{R}$ tout entier. Montrer de plus que cette solution est de classe C^∞.
2. Quelles sont les solutions stationnaires de (7) (*i.e.* les fonctions constantes solutions) ?
3. On suppose que $0 < y_0 < \pi$. Montrer que

$$\begin{array}{ll} (i) & \forall t \in \mathbb{R},\ 0 < y(t) < \pi, \\ (ii) & \lim_{t \to -\infty} y(t) = 0,\ \lim_{t \to +\infty} y(t) = \pi \end{array}$$

Exercice 7.

1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1. On suppose que pour tout $t \in \mathbb{R}, x \neq 0$, $xf(t,x) < 0$. Montrer que toutes les solutions maximales de l'équation différentielle $x'(t) = f(t, x(t))$ sont définies jusqu'à $+\infty$ et admettent une asymptote horizontale.
2. Soit $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^2, et $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. On considère le problème de Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = -\nabla F(x(t)), t \in \mathbb{R}, \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{8}$$

où ∇F désigne le gradient de F et est défini par

$$\nabla F = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial x_n}\right)$$

On suppose de plus que

$$\lim_{\|x\| \to \infty} F(x) = +\infty$$

   (a) Montrer que le problème de Cauchy (8) admet une unique solution maximale x définie sur un intervalle ouvert $]t_-, t_+[$, $t_\pm$ finis ou non.
   (b) Montrer que la fonction $t \mapsto F(x(t))$ est décroissante sur $\mathbb{R}$. En déduire que $t_+ = +\infty$.
   (c) En considérant le cas $n = 1$ et $F(x) = x^4/4$, montrer que l'on peut avoir $t_- > -\infty$.

Exercice 8. On considère le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y'(x) = x\, y(x)^2,\ x \in \mathbb{R} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{9}$$

1. Montrer que pour tout $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, il existe une unique solution maximale au problème (9) $y : I \to \mathbb{R}$ définie sur un intervalle ouvert I.
2. On suppose que $y_0 = 0$. Quelle est alors la solution maximale du problème (9) ?
3. On suppose que $y_0 \neq 0$. Notant (y, I) la solution maximale associée, montrer que soit y est strictement positive sur I, soit strictement négative sur I.
4. Résoudre l'équation dans le cas où $y_0 \neq 0$.

Exercice 9. Important

On considère le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} x'(t) = t^2 + x(t)^2,\ t \in \mathbb{R} \\ x(0) = 0 \end{cases} \tag{10}$$

1. Justifier l'existence d'une unique solution maximale (x, I) à ce problème.
2. Montrer que x est impaire, et étudier sa monotonie, sa concavité.
3. Montrer que l'intervalle I est borné, puis étudier les limites de x aux bornes de I.

Exercice 10.
On considère le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} x'(t) = \dfrac{1}{1 + tx(t)} \\ \\ x(0) = 0 \end{cases} \tag{11}$$

1. Justifier l'existence d'une unique solution maximale (x, I) à ce problème.
2. Montrer que x est impaire et strictement croissante.
3. Montrer que la solution est globale, i.e que $I = \mathbb{R}$. Etudier les limites de x en $\pm\infty$.

Exercice 11.
On considère l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} x'(t) = \cos(tx(t)), \ t \in \mathbb{R} \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{12}$$

où $t_0, x_0 \in \mathbb{R}$ sont donnés.

Justifier l'existence d'une unique solution maximale au problème de Cauchy (12), et montrer qu'une telle solution est globale (définie sur $\mathbb{R}$ tout entier).

Exercice 12. (*Cauchy-Lipschitz et fonctions implicites*)
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^2, et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$f(a, b) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \neq 0.$$

Expliquer le lien entre la recherche d'une fonction implicite $y = \phi(x)$ pour l'équation $f(x, y) = 0$ au voisinage de (a, b), et la résolution de l'équation différentielle

$$\begin{cases} y'(x) = -\dfrac{\partial_x f(x, y)}{\partial_y f(x, y)} \\ \\ y(a) = b \end{cases}$$

2) $f(t,x) = \sqrt{|g(t)|}$

au vois de 0 $\dfrac{|\sqrt{|y_1|} - \sqrt{|y_2|}|}{|y_1 - y_2|} = \dfrac{1}{|\sqrt{|y_1|} + \sqrt{|y_2|}|} \longrightarrow +\infty$

$\downarrow$

0_{y_1}

Correction :

Supposons qu'il existe un voisinage V de $(0,0)$ sur lequel f est Lip / x (par rapport)

On peut supposer que V est de la forme $]-a,a[\times]-b,b[$

$\forall (t,x)$ et $(s,y) \in]-a,a[\times]-b,b[$

$$|\sqrt{|x|} - \sqrt{|y|}| \leq L |x-y|$$

En particulier, $\forall x \in]0,b[$, $\sqrt{x} \leq L x$ ($x>0$ et $y=0$)

Donc $\forall x \in]0,b[$ $\dfrac{\sqrt{x}}{x} = \dfrac{1}{\sqrt{x}} \leq L$

Absurde car $\dfrac{1}{\sqrt{x}} \xrightarrow[x \to 0^+]{} +\infty$.

C.L ne s'applique donc pas, donc il n'y a pas unicité.

Exercice 2 : $f, g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tq $\forall (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ $f(t,x) < g(t,x)$

1. $\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ et $\begin{cases} y'(t) = g(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$

(a) Cauchy-Lipschitz

(b) Posons $w(t) = x(t) - y(t) \Rightarrow w'(t) = x'(t) - y'(t)$

$\begin{cases} w'(t) = f(t, x(t)) - g(t, y(t)) \\ w(t_0) = x_0 - y_0 = 0 \end{cases}$

Exercice 1 :

$$(1) \begin{cases} y'(t) = \sqrt{|y(t)|} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

1. On cherche les solut° de m̂ signe > 0

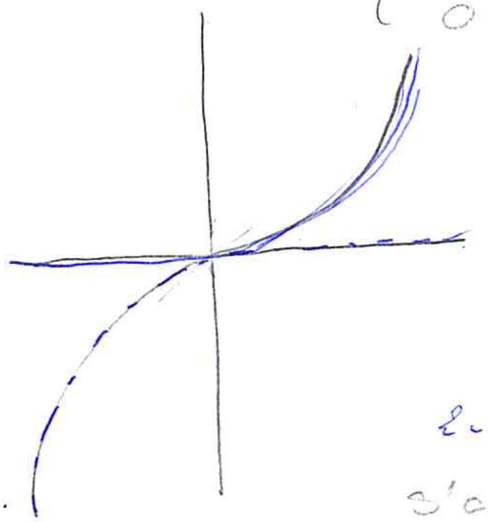
$y'(t) = \sqrt{y(t)}$ $\qquad (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$$\frac{1}{\sqrt{y(t)}} y'(t) = 1 \quad \Rightarrow \quad 2\sqrt{y(t)} = t$$

$$\Rightarrow \quad y(t) = \left(\frac{t}{2}\right)^2 = \frac{t^2}{4}$$

$y(t)$ n'est défini que sur $\mathbb{R}_*^+$ car $y'(t) = \frac{t}{2}$ qui est négatif sur $\mathbb{R}^-$ or $y'(t) > 0$ donc

$$y(t) = \begin{cases} \frac{t^2}{4} & \text{sur }]0; +\infty[\\ -\frac{t^2}{4} & \text{sur }]-\infty, 0[\\ 0 & \text{en } 0 \text{ par prolongement} \end{cases}$$



Ce problème de Cauchy admet trois solutions globales. (+ la solution nulle)

2. Le théorème de C.L ne s'applique donc pas.

Théorème de C.L :

$f : I \times U \longrightarrow \mathbb{R}$ $\qquad$ I ouvert de $\mathbb{R}$

$(t, x) \longrightarrow f(t,x)$ $\qquad$ U ouvert de $\mathbb{R}^n$

. On suppose f continue et localement Lipschitzienne par rapport à x.

$$(*) \begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Alors ~~Il~~ $\forall (t_0, x_0) \in I \times U$, $\exists !$ solution au problème $(*)$ avec J intervalle ouvert contenant t_0.

(voir cours)

$$\omega'(t) = x'(t) - y'(t)$$

$$= f(t, x(t)) - g(t, y(t))$$

$$= f(t, x(t)) - g(t, x(t)) + g(t, x(t)) - g(t, y(t))$$

$$< g(t, x(t)) - g(t, y(t)) < L|\omega(t)|$$

On a
- $\omega \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
- $\omega(t_0) = 0$
- $\forall t \in \mathbb{R} \quad \omega'(t) < L|\omega(t)|$

mq $\forall t > t_0 \quad \omega(t) < 0$

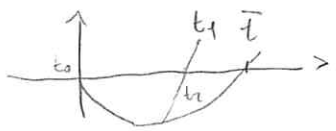
L'inégalité est valabe pour tout t.

En t_0 : $\omega'(t_0) < C\underbrace{|\omega(t_0)|}_{=0} = 0$

$\omega'(t_0) < 0$

$\exists \delta > 0$ tq $\forall t \in [t_0, t_0 + \delta[, \quad \omega'(t) < 0$

$\omega(t_0) = 0$ donc sur $]t_0, t_0 + \delta[$, $\omega(t) < 0$.



Par l'absurde, on suppose qu'il existe $t > t_0$ tq $\omega(t) = 0$

Posons $J = \{t > t_0 \mid \omega(t) = 0\}$ $J \neq \emptyset$, minoré par t_0 donc il admet une borne ińférieure (ici un min car ω continue).

Soit $\bar{t} = \min J$ $\omega(\bar{t}) = 0$ et $\omega'(\bar{t}) < 0$. $\exists\, \theta > 0$ tq

$\forall t \in]\bar{t} - \theta ; \bar{t} + \theta[$, $\omega(t) > 0$

Soit $t_1 \in]\bar{t} - \theta, \bar{t}[$, par le th des valeurs intermédiaire, comme ω continue, $\exists\, t_0 < t_2 < t_1$ tq $\omega(t_2) = 0$ Absurde

Donc $\forall t > t_0 \quad \omega(t) < 0$.

/5

Deuxième méthode : par Groenwall.

Soient $a, b \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Soit $x \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ tq

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad x'(t) \leq a(t)x(t) + b(t).$$

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-\int_0^t a(s)ds} x(t)\right) = e^{-\int_0^t a(s)ds}\left(x'(t) - a(t)x(t)\right) \leq e^{-\int_0^t a(s)ds} b(t).$$

$$e^{-\int_0^t a(s)ds} x(t) - x(0) \leq \int_0^t e^{-\int_0^s a(\sigma)d\sigma} b(s)ds$$

$$\Rightarrow x(t) \leq x(0)\exp\left(\int_0^t a(\sigma)\right)ds + \int_0^t e^{\int_s^t a(\sigma)d\sigma} b(s)ds.$$

$$\omega'(t) = C \times \mathrm{sign}(\omega(t)) \omega(t)$$

avec $\mathrm{sgn}(\omega(t)) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega(t) \geq 0 \\ -1 & \text{sinon} \end{cases}$

Soit un intervalle sur lequel $\omega(t)$ ne change pas de signe. Sur cet intervalle $a(t) = C\,\mathrm{sgn}(\omega(t))$ est continue.

Soit $z(t) = e^{-\int_{t_0}^t C \cdot \mathrm{sgn}(\omega(s))ds} \omega(t)$

z est ~~dérivable~~ continue sur l'intervalle et $\forall t \in \mathbb{R}, \omega(t) \neq 0$ on a

$$z'(t) = e^{-\int_{t_0}^t C\,\mathrm{sgn}(\omega(s))ds)} \left(\omega'(t) - C\,\mathrm{sgn}(\omega(t))\omega(t)\right)$$

$$\Rightarrow z'(t) < 0$$

Soit $\bar{t}$, $\omega(\bar{t}) = 0$ mq z est dérivable en $\bar{t}$:

$$z(\bar{t}+h) - z(\bar{t}) = z(\bar{t}+h) = e^{-\int_{t_0}^{\bar{t}+h} C\,\mathrm{sgn}(\omega(s))ds} \omega(\bar{t}+h)$$

Donc $\dfrac{z(\bar{t}+h) - z(\bar{t})}{h} = e^{-\int_{t_0}^{\bar{t}+h} C\,\mathrm{sgn}(\omega(s))ds} \dfrac{\omega(\bar{t}+h)}{h} = e^{-\int_{t_0}^{\bar{t}+h} C\,\mathrm{sgn}(\omega(s))ds} \dfrac{\omega(\bar{t}+h) - \omega(\bar{t})}{h}$

$\hookrightarrow e^{\int_{t_0}^{\bar{t}} C\,\mathrm{sgn}(\omega(s))ds}$ $\qquad \hookrightarrow \omega'(\bar{t}) - C\,\mathrm{sgn}(\omega(\bar{t}))\omega$

$z(t_0) = \omega(t_0) = 0$ et

$\forall t \in \mathbb{R}, z'(t) < 0$

$\forall t \geq t_0 \quad z(t) < 0$

Donc $\forall\, t > t_0$, $\omega(t) < 0$.

Pour $t < t_0$: $\omega(t) > 0 \Rightarrow x(t) > y(t)$.

(c) $$f(t,x) \leqslant g(t,x)$$

$$\vdots$$

$$\omega'(t) \leqslant C|\omega(t)|$$

$$\vdots$$

$$z'(t) \leqslant 0 \Rightarrow z(t) \leqslant 0 \Rightarrow \omega(t) \leqslant 0 \qquad t \geqslant t_0$$

2. (a) Posons $\omega(t) = x(t) - y(t)$ $\quad \omega(t) \in C^1(I, \mathbb{R})$

$\omega(t_0) = 0$

$\omega'(t) = x'(t) - y'(t)$ continue

$= f(t, x(t)) - g(t, y(t))$ continue

$\omega'(t_0) = 0 \quad = \underbrace{f(t, x(t)) - g(t, x(t))}_{<0} + g(t, x(t)) - g(t, y(t))$

$< g(t, x(t)) - g(t, y(t))$

Donc $\omega'(t_0) < g(t_0, x_0) - g(t_0, y_0) = 0$

Donc $\omega'(t_0) < 0$

Donc $\exists\, \delta > 0$, tq $\forall\, t \in]t_0, t_0 + \delta[$, $\omega(t) < 0 \Rightarrow x(t) < y(t)$

(b) Soit $J = \{c \in I,\ c > t_0,\ \forall\, t \in]t_0, c[,\ x(t) < y(t)\}$

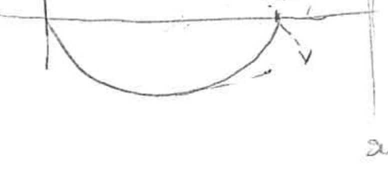
ie $J = \{c \in I,\ c > t_0,\ \forall\, t \in]t_0, c[,\ \omega(t) < 0\}$

J non vide car $t_0 + \delta \in J$. Il s'agit de mq $\sup J = \sup I$

si $m = +\infty$ alors c'est ok (en particulier on a $\sup I = +\infty$.

Par l'absurde : Supposons $m < \sup I$, $m \in I$

- Si $\omega(m) < 0$



sup I

Correction :

Comme $m = \sup J$ On a $x(m) \leq y(m)$ i.e $\omega(m) \leq 0$

(Soit (t_n) une suite dans J tq $t_n \to m$, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$x(t_n) < y(t_n)$, à la limite comme x et y continue $x(m) \leq y(m)$)

- si $x(m) < y(m)$

Alors $\exists\, \theta > 0$ tq $x(t) < y(t)$ sur $[m, m\,\theta[$

Donc $m + \theta \in J$, ce qui contredit $m = \sup J$.

- si $x(m) = y(m)$

On obtient $\omega'(m) < g(m, x(m)) - g(m, y(m)) = 0$

Donc $\omega'(m) < 0$

Donc $\exists\, \theta' > 0$ tq $\omega(t) > 0$ sur $]m - \theta'; m[$. Or $\frac{2m - \theta'}{2} \in J$

donc $\omega(t) < 0$ sur $]t_0, \frac{2m-\theta'}{2}[$. Absurde.

Conclusion : $m = \sup I$.

c) pour $t < t_0$: $x(t) > y(t)$

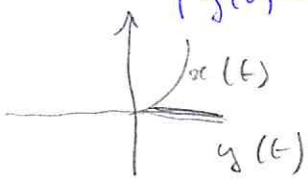
d) f et g continues $f(t,x) \leq g(t,x)$

$f(t,x) = \sqrt{|x|}$

$g(t,x) = \sqrt{|x|}$

x solution $\begin{cases} x' = \sqrt{|x|} \\ x(0) = \alpha \end{cases}$ y solution $\begin{cases} y' = \sqrt{|y|} \\ y(0) = \alpha \end{cases}$

tq $y(t) < x(t)$ pour $t > 0$.



$\begin{cases} x(t) = \frac{t^2}{4} \\ y(t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R} \end{cases}$

$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(0) = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} y'(t) = g(t, y(t)) \\ y(0) = 0 \end{cases}$ $f(t,x) \leq g(t,x)$ mais $x(t) > y(t)$, $\forall t >$

contre exemple

Exercice 3 :

1. Soit $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{R}^n$. $\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) & t \in I \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ (4)

f est continue sur $I \times \mathbb{R}^n$ et localement Lipschitzienne par rapport à sa deuxième variable. Alors il existe une unique solution maximale au problème (4) définie sur un intervalle ouvert $J \subset I$ tel que $x \in C^1(J, \mathbb{R}^n)$ ✓

2. Supposons $\sup J < \sup I$ alors $x(t)$ sort de tout compact dans $\mathbb{R}^n$ au voisinage de $t = \sup J$ i.e $\forall R > 0$, ~~compact~~ $\subset \mathbb{R}^n$,
$\exists \eta_R \in J$ tq $\forall t \in J,\ t > \eta_R,\ x(t) \notin \bar{B}(0_{\mathbb{R}^n}, R)$

$\Leftrightarrow \forall R > 0,\ \exists \eta_R \in J,\ \forall t > \eta_R \quad \|x(t)\|_{\mathbb{R}^n} > R$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{t \to \sup J} \|x(t)\| = +\infty$

3. Supposons que la solution maximale $x : J \to \mathbb{R}^n$ bornée sur J
$\exists M \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall t \in J,\ \|x(t)\| \leq M$ donc $\sup J = \sup I$ et $\inf J = \inf I$
par la question (2) [car si $\sup J < \sup I$ la sol° n'est pas bornée]
Donc x est globale.

4. Si J pas ~~majoré~~ : $J =]t_*, +\infty[$ avec $t_* \in [-\infty, +\infty[$
. Soit $t_* = -\infty$ donc $J = \mathbb{R}$ et donc $I = \mathbb{R}$ et $x(t)$ est globale
. Si $t_* \in \mathbb{R}$

x est borné sur $]t_*, 0[$. On a pas $\lim\limits_{t \to t_*} \|x(t)\| = +\infty$.

donc $t_* = \inf J = \inf I$ donc x est globale.

. Si J majoré $J =]t_*, T_*[$ avec $t_* \in]-\infty, t_0[$ et $T^* \in \mathbb{R}$
. Si $t_* = -\infty$ J borné sur $[t_0, T_*[$. On a pas $\lim\limits_{t \to t_*} \|x(t)\| = +\infty$
Donc $T^* = \sup J = \sup I$

$\inf J = -\infty = \inf I$.

Par la question 3), x est globale.

Pour tout intervalle $\tilde{J}$ borné inclu dans J, $\exists\, C(t_*, T^*)$ tq
$\forall t \in \tilde{J}$ $\|x(t)\| \leqslant C\ (t_*, T^*)$ ← de bornes (t_*, T^*)

5) $f : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ vérifie (H1)-(H9) donc (C.L) $\exists !$ solut° définie sur $J \subset I$ maximale. Or f bornée sur $I \times \mathbb{R}^n \Rightarrow x'(t)$ bornée sur I.

Par C.L. $\exists !$ sol. max $x \in \mathcal{C}^1(J, \mathbb{R}^n)$
$\exists M \in \mathbb{R}^+$, $\|f\| < M$. Soit $\tilde{J} \subset J$ intervale borné :
$\forall t \in \tilde{J}$: $\|x'(t)\| = \|f(t, x(t))\| \Rightarrow \|x'(t)\| \leqslant M$.
Soit $t_1 \in \tilde{J}$
$\forall t \in \tilde{J}$ $\|x(t) - x(t_1)\| \leqslant \cancel{M}\,(t - t_1)$

$\Rightarrow \|x(t)\| \leqslant \|x(t_1)\| + M|t - t_1|$

$\Rightarrow \|x(t)\| \leqslant \|x(t_1)\| + M|T_* - t_*|$ où t_* et T_* sont les bornes de $\tilde{J}$. On a donc $x(t)$ borné sur tout intervalle borné donc par (4) $x(t)$ est globale.

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\,ds$$

$$\|x(t)\| \leqslant \|x(t_0)\| + |t - t_0| M$$

$$\leqslant \|x(t_0)\| + |T^* - t_*| \quad \ldots$$

6) Par C.L $\exists$ sol max $x \in \mathcal{C}^1(J, \mathbb{R}^n)$
$\exists\, \lambda, \mu$, $\|f(t, x)\| \leqslant \lambda\|x\| + \mu$ $\forall (t, x) \in I \times \mathbb{R}^n$
Soit $\tilde{J} \subset J$ intervalle borné.
$\forall t \in \tilde{J}$: $\|x'(t)\| \leqslant \lambda \|x(t)\| + \mu$

$$v(t) \leqslant b(t) + \int_0^t a(s) v(s)\,ds$$

$$w(t) = \int_0^t a(s) v(s)\,ds$$

$$w'(t) = a(t) v(t) \leqslant a(t) b(t) + a(t) w(t)$$

$\Leftrightarrow w'(t) \leqslant a(t) b(t)$ ~~...~~ $w(t)$
$\Rightarrow$ [illegible]

$\Rightarrow \omega(t) \leq \int_{t_0}^{t} e^{\int_s^t a(\sigma)d\sigma} a(s)b(s)ds$

$\|x(t)\| \leq \|x(t_0)\| + |\int_{t_0}^{t} \|f(s,x(s))\|ds|$

on suppose $t \geq t_0$ pour enlever les valeurs absolues.

$\leq \|x(t_0)\| + \int_{t_0}^{t} (\lambda\|x\| + \mu)ds \quad \forall t \in \tilde{J}$

$\leq \|x(t_0)\| + \lambda\int_{t_0}^{t}\|x\|ds + (t-t_0)\mu$

Groenwall avec $b(t) = \|x(t_0)\| + (T-t_0)$ et $a(t) = \lambda$ où $T = \sup \tilde{J}$ ...

on obtient

$\|x(t)\| \leq (\|x(t_0)\| + (T-t_0)\mu) \times [1 + \int_{t_0}^{t} \lambda e^{\lambda(t-s)}ds]$

$\ldots \leq (\|x(t_0)\| + (T-t_0)\mu)e^{\lambda(\ldots)}$

ne dépend de T donc bornée, de même si $t < t_0$.

Exercice 4 :

$f : \mathbb{R} \times]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$

$(t, x) \longrightarrow -\frac{1}{x}$

Soit

. $f(x) = -\frac{1}{x}$ est une fonction composée de fonction continues sur $]0,+\infty[$ car $-\frac{1}{x}$ continue sur $\mathbb{R}^*$

. Lipschitzien car C^1 ! $|f(x) - f(y)| = |-\frac{1}{x} + \frac{1}{y}| = |\frac{1}{y} - \frac{1}{x}| = |\frac{x-y}{xy}|$

$x \neq y \quad \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|} = \frac{|\frac{x-y}{xy}|}{|x-y|} = \frac{1}{|xy|} \leq 1$

2. Il existe ! sol maximal au système de Cauchy (S) sur l'intervalle $J =]t_0, T^*[\subset \mathbb{R}$.

3. $\begin{cases} x'(t) = -\frac{1}{x(t)} \\ x(0) = x_0 \end{cases} \iff x(t)x'(t) = -1 \qquad x' = -2 \times \frac{1}{2\sqrt{-2t+C}} = -\frac{1}{x(t)}$

$\iff \frac{1}{2}x(t)^2 = -t + C$

$\iff x(t) = \pm\sqrt{-2t + C}$ + car soit positif soit negatif or $x_0 > 0$ donc $x(t) > 0 \ \forall t \in J$

$x(0) = x_0 = \sqrt{C} \Rightarrow C = x_0^2$

on prend $x(t) = \sqrt{-2t + x_0^2}$

définit quand $-2t + x_0^2 > 0 \Rightarrow -2t > x_0^2 \Rightarrow t < \frac{x_0^2}{2}$

On a donc $J =]\underset{t_*}{-\infty}, \underset{T_*}{\frac{x_0^2}{2}}[$ intervalle maximale.

4 $x(t) = \sqrt{-2t + x_0^2} \xrightarrow[t \to T^*]{} 0$ ~~la solution max bornée sur J donc la solution est globale~~ $0 \notin]0,+\infty[$, donc x sort de tout compact de $]0,+\infty[$. donc ce n'est pas global. ("la solution n'est pas obligée d'exploser")

Exercice 5 :

$$\begin{cases} v'(t) = -v(t)^2, & t \in \mathbb{R} \\ v(0) = c \in \mathbb{R} \end{cases}$$

1. Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$(t, v) \longrightarrow -v^2$

la fonction est continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et lips. par rapport à sa 2ème var.

soit $f(v) = -v^2$ $\forall v \neq w$

$\left(\left| \frac{f(v) - f(w)}{|v-w|} \right| = \left| \frac{w^2 - v^2}{|v-w|} \right| = \left| \frac{(w-v)(w+v)}{|v-w|} \right| = |w+v| \right)$

C^1 donc C.L

2. $v(0) = 0$ fonction nulle solution

~~Soit~~ $v(0) \neq 0$ soit t_1 tq $v(t_1) = 0$ alors

$\begin{cases} v'(t) = -v(t)^2 \\ v(t_1) = 0 \end{cases}$ a deux solutions distinctes $\{v(t) ; 0\}$

par unicité, impossible donc $\forall t, v(t) \neq 0$.

3. sol° : $v(t) = \frac{v_0}{v_0 t + 1}$

. si $v_0 > 0$ $J =]-\frac{1}{v_0}, +\infty[$

. si $v_0 < 0$ $J =]-\infty, -\frac{1}{v_0}[$.

Exercice 6 : $\begin{cases} y'(t) = \sin(y(t)) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$

3. (ii) suite :

$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{\bar{t}} y'(s)ds + \int_{\bar{t}}^{t} y'(s)ds$

$\geq y_0 + \int_{t_0}^{\bar{t}} y'(s)ds + \underbrace{(t-\bar{t})}_{t\to+\infty \ \to +\infty} \frac{\sin \alpha}{2}$

1. $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$(t, y) \longrightarrow \sin(y)$

$f \in C^{\infty}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ donc par C.L $\exists !$ sol° maximale à (7) ✓ De plus f est borné sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ car $\sin(y) \in [-1, 1]$ d'où par le théorème des bouts la solution est globale ✓ Enfin $y' = \sin(y)$ qui est C^{∞} donc y est C^{∞} * y est $C^1(\mathbb{R})$ et $y'(t) = \sin(y(t))$ donc $y' \in C^1$ donc $y \in C^2$. y'' est C^1 donc y est C^3 .... ~~par récurrence~~ $\forall n \in \mathbb{N}$, $y^{(n)}$ est obtenu par addition et multiplicat de $y^{(n-1)}, y^{(n-2)}, \dots, y', y$ $\sin(y) \cos(y)$ donc y est $C^k \Rightarrow y^{(k+1)}$ est $C^1 \Rightarrow y$ est C^{k+1} par récurrence y est C^{∞}

2. solution stationnaire $\Leftrightarrow y(t) = y_0 \ \forall t \Leftrightarrow \boxed{y'(t) = 0}$
$\Leftrightarrow \sin(y(t)) = 0 \Leftrightarrow y(t) = k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$.

3. On suppose $0 < y_0 < \pi$

(i) . Supposons $\exists t$, tq $y(t) < 0$ alors $\exists t_1$ tq $y(t_1) = 0$, le problème de Cauchy $\begin{cases} y'(t) = \sin(y(t)) \\ y(t_1) = 0 \end{cases}$ à deux solutions distinctes : la sol° stationnaire $y(t) = 0$ et $y(t)$. or par unicité des solutions c'est impossible, d'où $y(t) > 0 \ \forall t \in \mathbb{R}$

. De m supposons $\exists t$ tq $y(t) > \pi$ alors il existe : t_2 tq $y(t_2) = \pi$, le problème de Cauchy $\begin{cases} y'(t) = \sin(y(t)) \\ y(t_2) = \pi \end{cases}$ à 2 sol distinctes ; la sol stationnaire $y(t) = \pi$ et $y(t)$. Or par unicité des sol° c'est impossible d'où $y(t) < \pi \ \forall t \in \mathbb{R}$

ii) $y'(t) = \sin(y(t))$ positive sur $[0, \pi]$ donc y est croissante, bornée par $]0, \pi[$. Elle admet donc une assymptote en $\pm \infty$
Donc $\exists \alpha, \beta \in [0, \pi]$ tq (1) $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t) = \alpha$ et $\lim\limits_{t\to-\infty} y(t) = \beta$.
(1) $\Rightarrow \sin y(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} \sin(\alpha) \Rightarrow y'(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} \sin(\alpha) \in]0, 1[$ $y(t) = y_0 + \int_0^t y'(s)ds$ $\exists \bar{t} \in \mathbb{R}$,
$\forall t \geq \bar{t}$ ...... $\sin \alpha$

Exercice 7 : $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ $\forall t \in \mathbb{R}, x \neq 0$ $xf(t,x) <$

$\left[x'(t) = f(t, x(t)) \Rightarrow xx'(t) = xf(t,x) < 0 \Rightarrow \left(\frac{x^2(t)}{2}\right)' < 0 \right.$

La fonction $\left. x^2(t) \searrow . \right]$

Plus proprement

I. (a). Mq $\forall t \in \mathbb{R}$, $f(t,0) = 0 \Rightarrow x(t) = 0$ sol° stationnaire

(b). Soit x solution max non-identiquement nulle donc $\forall t \in \mathbb{R}$ $x(t) \neq 0$ (unicité de C.L)...

(a) $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $f(t, \frac{1}{n}) < 0$ donc $\left.\begin{array}{l} \lim_{n\to\infty} f(t,\frac{1}{n}) = f(t,0) \leq 0 \\ \lim_{n\to+\infty} f(t,-\frac{1}{n}) = f(t,0) \geq 0 \end{array}\right\} f$ continue

donc $f(t,0) = 0$ solution stationnaire.

(b)... donc $x(t)x'(t) = x(t) f(t, x(t)) < 0$

d'où $\left(\frac{x^2(t)}{2}\right)' < 0$

d'où $t \longrightarrow \frac{x(t)^2}{\cancel{2}}$ est décroissante.

Soit J intervalle de définition de la solution maximale $x(t)$. Si $\sup J < +\infty$, alors $\lim_{t\to+\infty} |x(t)| = +\infty$ par le théorème des bouts.

Impossible car $x^2(t)$ décroissante donc $\sup J = +\infty$

x^2 décroissante minorée par 0 donc $\exists\, \alpha \geq 0$ tq $x^2(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} \alpha$

et x continue.

Donc $x(t) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \pm\sqrt{\alpha}$ Donc les sol° admettent une asymptote horyzontale.

2-

$$x'(t) = -\nabla F(x(t)) \qquad \lim_{\|x\| \to \infty} F(x) = +\infty$$
$$x(t_0) = x_0$$

(a) $F \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n) \Rightarrow -\nabla F$ $\mathcal{C}^1$, donc lip. par rapport à sa deuxième variable. (8) admet donc par C.L une unique sol° maximale définie sur $]t_-, t_+[$, $t_\pm$ finis ou non.

(b) Calculons $\frac{d}{dt}F(x(t)) = \nabla F(x(t)) \cdot x'(t)$

$$= -\|\nabla F(x(t))\|^2_{\mathbb{R}^n} \leqslant 0$$

Donc $t \to F(x(t))$ est décroissante. Si $t_+ < +\infty$, alors $\lim_{t \to t_+} \|x(t)\| = +\infty$ (th des bouts)

donc $\lim_{t \to t_+} F(x(t)) = \lim_{\|x\| \to +\infty} F(x(t)) = +\infty$

~~I~~mpossible car $F(x(t))$ décroissante donc $t_+ = +\infty$

(c) $F(x) = \frac{x^4}{4}$ $\quad -\nabla F(x(t)) = -x^3$ $\quad$ (8) devient $\begin{cases} x'(t) = -x^3 \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$

Si $x > 0$ $\quad x'(t) < 0 \Rightarrow F(x)$ décroissant
Si $x < 0$ $\quad x'(t) > 0 \Rightarrow F(x)$ croissante.

$\lim_{t \to -\infty} \|x(t)\| :$

$$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \to \frac{x^4}{4} \qquad F'(x) = x^3 \qquad x'(t) = -x^3(t)$$

Si x sol° maximale non nulle $-\frac{x'(t)}{x^3(t)} = 1 \iff \frac{1}{2}\frac{1}{x^2} = t - C$ $\in$

Donc $x^2(t) = \frac{1}{2(t-c)}$ $\quad$ ~~Donc $x(t) = \pm \frac{1}{\sqrt{2(t-c)}}$~~ ~~en fonction de x_0~~

raisonnons sur x^2.

Donc $x(t)$ défini sur $]c, +\infty[$ avec $c \in \mathbb{R}$. $c > -\infty$.

Exercice 9 : $\begin{cases} x'(t) = t^2 + x(t)^2, \ t \in \mathbb{R} \\ x(0) = 0 \end{cases}$

1. C^1 donc Lip par rapport à x donc $\exists$ unique solution maximale (x, I) à (10).

2. x impaire $\Rightarrow x(-t) = -x(t)$

$x'(t) = t^2 + x(t)^2 \geqslant 0 \ \forall t$ donc $x(t)$ est croissante $\forall t \in I$

De plus $x(0) = 0 \Rightarrow \forall t < 0 \ x(t) < 0$ et $\forall t > 0 \ x(t) > 0$ car $x(t)$ continue et strictement croissante (car par unicité, $\nexists t_i \in I$ tq $x(t) = 0$ $t_i \neq 0$).

$$x'(0) = 0 + x(0)^2 = 0$$

On sait que $x'(t)$ est pair.

En effet soit $f : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$(t, x) \to t^2 + x^2$

On a $f(0,0) = 0$. et $f(t,x) \geq 0 \ \forall (t,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \setminus \{(0,0)\}$.

$\Rightarrow f(-t, -x) = (-t)^2 + (-x)^2 = t^2 + x^2 = f(t,x)$

On a donc $x'(t) = t^2 + x(t)^2 = (-t)^2 + (x(-t)^2)$

On a donc $x(t)^2 = x(-t)^2$

$\Rightarrow x(-t) = \begin{cases} \text{soit } x(t) \\ \text{soit } -x(t) \end{cases}$

Or $x(0) = 0$ et quand t négatif x est négatif d'où $\forall t > 0$ $x(-t) = -x(t) < 0$ et d'où la fonction x est impair.

Correction :

Soit $y(t) = -x(-t)$, $t \in \tilde{I}$, $\tilde{I} = \{t \in \mathbb{R}, -t \in I\}$

Montrons que $\tilde{I} = I$ et $\forall t \in I$ $x(t) = y(t)$.

$y'(t) = -(-x'(-t)) = x'(-t) = t^2 + x(-t)^2 = t^2 + y^2(t)$ et $y(0) = -x(0) = 0$

Donc y solution au problème de Cauchy et $\tilde{I} \subset I$ et $\forall t \in \tilde{I}$, $y(t) = x(t)$ par unicité de la solution maximale.

$\tilde{I} \subset I$ et $\tilde{I}$ symétrique de $I \Rightarrow \tilde{I} = I$

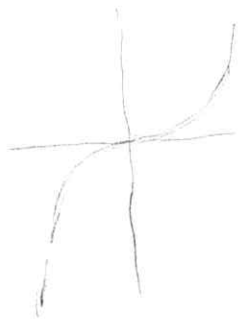
Donc x est impair.

x est croissante strictement

. Sur $I \cap \mathbb{R}^*$, x est strictement croissante.

x' somme de deux fonction croissante donc croissante donc x convexe sur $I \cap \mathbb{R}_+$

Donc sur $I \cap \mathbb{R}_-$ x est concave.



3 - Supposons $I = \mathbb{R}$,

x croissante, $x(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} \alpha$

$$\alpha \in \mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}$$

Et $t > 0 \Rightarrow x(t) > 0$

$$\forall t > 0, \quad \frac{x'(t)}{x^2(t)} = \frac{t^2}{x^2(t)} + 1$$

Soit $t \geq 1$, on a :

$$-\frac{1}{x(t)} + \frac{1}{x(1)} = \int_1^t \left(\frac{s^2}{x^2(s)} + 1 \right) ds \geq t - 1$$

$$\frac{1}{x(t)} \leq \underbrace{\frac{1}{x(1)} + 1 - t}_{\xrightarrow[t \to +\infty]{} -\infty}$$

Or $x(t) \longrightarrow 0^-$ pas possible.

Donc $\sup I < +\infty$ et par sym. $\inf I > -\infty$ d'où I est borné.

Autre Méthode :

Si $\sup I = +\infty$, pour $t \geq 1$

$$x'(t) = t^2 + x^2(t)$$

$$x'(t) \geq 1 + x^2(t)$$

$$\frac{x'(t)}{1+x^2(t)} \geq 1$$

$$\arctan(x(t)) - \arctan(x(0)) \geq t$$

$$\arctan(x(t)) \geq t$$

impossible car arctan bornée.

. étudions le limites de x aux bornes de I.

. x est croissante donc elle admet une limite en sup de I. Par le théorème des bout, elle sort de tout compact de $\mathbb{R}$, donc $\lim_{t \to \sup I} x(t) = +\infty$. Par imparité, $\lim_{t \to \inf I} x(t) = -\infty$.

Exo 12 :

$$(E) \begin{cases} y'(x) = -\dfrac{\partial_x f(x,y)}{\partial_y f(x,y)} \\ y(a) = b \end{cases}$$

. Soit ϕ solution de (E) sur I

On montre que $\forall x \in I$, le point $(x, y) = (x, \phi(x))$ est solution de $f(x,y) = 0$.

$\phi(x)$ solution de (E) $\phi'(x) = -\dfrac{\partial_x f(x, \phi x)}{\partial_x f(x, \phi(x))} \Rightarrow \underbrace{\phi(x) \partial_y f(x, \phi(x)) + \partial_x f(x, \phi}_{=0}$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx} f(x, \phi x)) = 0 \quad \forall x \in I$$

I intervalle $\Rightarrow I$ connexe donc $f(x, \phi(x)) = f(a, \phi(a)) \ \forall x \in I$
$= f(a,b) = 0$

Exercice 8:

$$\begin{cases} y'(x) = x\,y(x)^2 & x \in \mathbb{R} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

$f(x,y) = xy^2$ continue, lipschitzienne par rapport à y^2.

$$\frac{|f(y)-f(z)|}{|y-z|} = \frac{|x(y^2-z^2)|}{|y-z|} = |x(y+z)|$$

e^{1}

C.L

2. $\begin{cases} y'(x) = xy^2(x) \\ y(x_0) = 0 \end{cases}$ $\quad \dfrac{y'(x)}{y^2(x)} = x \Rightarrow -\dfrac{1}{y(x)} = \dfrac{1}{2}x^2$

$\Rightarrow y(x) = -\dfrac{2}{x^2}$

Si $y(x_0) = 0$ la ~~fonction~~ fonction nulle $y(x) = 0$ est solution maximale du problème de Cauchy et elle est unique.

3. Soit $y_0 \neq 0$ On suppose $y(x)$ à la fois positive et négative alors $\exists\ x_p$ tq $y(x_p) = 0$ on a alors une autre solution au problème (g) qui croise la première en 0. Par unicité des solutions c'est impossible, d'où y est soit strictement positive, soit strictement négative.

4. $y_0 \neq 0$ $\quad y(x) = \dfrac{2y_0}{y_0(x_0^2 - x^2) + 2}$

On doit avoir $y_0(x_0^2 - x^2) + 2 > 0 \quad \forall y_0 \neq 0$

- Si $\dfrac{2}{y_0} + x_0^2 < 0$ alors $I = \mathbb{R}$

Si $y_0 > 0$ $\quad x \in \left]-\sqrt{x_0 + \frac{2}{y_0}}, \sqrt{x_0 + \frac{2}{y_0}}\right[$

Si $y_0 < 0$ • $I = \left]-\infty, -\sqrt{x_0 + \frac{2}{y_0}}\right[$ si $x_0 < 0$

ou $\left]\sqrt{x_0 + \frac{2}{y_0}}, +\infty\right[$ si $x_0 > 0$

$\overline{19}$

Exo 10 : $\begin{cases} x'(t) = \dfrac{1}{1+tx(t)} \\ x(0) = 0 \end{cases}$

1. Soit $f : \mathbb{R} \times]-\infty, -\frac{1}{t}[\cup]-\frac{1}{t}; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$.

$$(t,x) \longmapsto \frac{1}{1+tx}$$

$1+tx=0$
$tx=-1$
$x=-\frac{1}{t}$

$$\frac{|f(t,x)-f(t,y)|}{|x-y|} = \frac{\frac{1}{1+tx} - \frac{1}{1+ty}}{x-y}$$

$\mathcal{C}^\infty$ sur $D_f = \{(t,x)\in\mathbb{R}^2 \text{ tq } tx \neq -1\}$

2. on pose $\tilde{I} = -I$ et $y(t) = -x(-t)$

3. solution globale :

On pose $I =]-T, T[$

on voit que soit $\lim\limits_{t\to T} x(t) = \alpha \in \mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}$

qu'il y a contradiction

donc $I = \mathbb{R}$

limite en $\pm\infty$

→ on voit que quand $\alpha \neq +\infty$

$$\alpha \leftarrow x(t) = \int_0^t \frac{1}{\cancel{1}+s(x(s))}\,ds \underset{+\infty}{\sim} \int_0^{t} \frac{1}{s\alpha}\,ds \longrightarrow +\infty$$

Impossible donc $\alpha = +\infty$

Exo 11 : $f(t,x) = \cos(tx)$ $\mathcal{C}^1$ est bornée d'où

CL : sol max ; Th des bouts : globale