

INTRODUCTION

1) 5 séances masters Recherche / 3 séances masters Pro

2) 1 projet à rendre le : - 18/02 à 10h (Reche)
- 13/02 à 18h (Pro)

soit en version papier, soit en pdf.

3) Pour les masters Pro : ce sera la seule évaluation de l'UE

4) Pour les masters Recherche : ça comptera dans la note finale de l'UE, à laquelle s'ajoutera un examen de 2h le 18/02 (10h - 12h, puis retour sur le projet).

Articles de recherche à lire (pas obligatoire, mais complément du cours, ça aidera pour le projet et l'examen).

→ <http://math.univ-lyon1.fr/~crouste> puis "UE Dynamique"

(*) Organisation de l'UE:

- 3 premières séances : Équations à retard, stabilité, bifurcations, et éventuellement chaos + "T.D"

- 4^{ème} séance : théorie des EDR, dont théorèmes d'existence et unicité, linéarisation.

- 5^{ème} séance : examen + retour des projets et de l'UE.

I) Introduction aux Equations à retard

On suppose en général simultanéité des action et réaction, par exemple

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (ED=)$$

Certains phénomènes n'obéissent pas à cette règle (importance de l'échelle de temps dans la description d'un processus).

Le modèle de Malthus. par exemple décrit l'évolution d'une population d'individus notée $N(t)$, au temps t :

$$N'(t) = \underbrace{b N(t)}_{\text{naissance}} - \underbrace{d N(t)}_{\text{mort}}$$

qui se résout facilement:

$$N(t) = e^{(b-d)(t-t_0)} N(t_0)$$

Soit la population croît exponentiellement ($b > d$) soit elle décroît exponentiellement ($b < d$) et disparaît.

Le modèle n'est en général pas valable, ou pas valable en temps long (fluctuations de la population ...)

Cooke et Yorke (1973) proposent un modèle "de Malthus" modifié:

$$N'(t) = b N(t-R) - d N(t)$$

où R est l'âge auquel un individu devient adulte (équivalent: peut se reproduire)

Il s'agit d'une Equation (linéaire) à retard (discret)

Exemple 1

$$\begin{cases} x'(t) = -\frac{\pi}{2} x(t - \frac{1}{2}) \\ x(0) = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Les 2 applications $t \mapsto \cos \frac{\pi}{2}(t + \frac{1}{2})$ et $t \mapsto \sin \frac{\pi}{2}(t + \frac{1}{2})$ sont solutions (il y en a en fait une infinité) du système. Il n'y a pas unicité au sens classique (EDO). Il y aura unicité (sous certaines conditions) si les solutions ne coïncident pas sur un intervalle de longueur au moins égale au retard (ici $R = \frac{1}{2}$).

L'équation $N'(t) = b N(t - R) - d N(t)$ n'est pas une EDO, la connaissance de $N(t_0)$ ne permet pas de résoudre l'équation. Il faut connaître $N(t_0 - R)$.

En fait, pour résoudre sur l'intervalle $[t_0, t_0 + R]$, il faut connaître la solution sur $[t_0 - R, t_0]$.

La donnée initiale doit donc être une fonction définie sur $[t_0 - R, t_0]$. Considérons le système

$$\begin{cases} N'(t) = b N(t - R) - d N(t), & t \geq t_0 \\ N(t) = \varphi(t), & t \in [t_0 - R, t_0] \end{cases}$$

Pour $t \in [t_0, t_0 + R]$, on a

$$N'(t) = b \varphi(t - R) - d N(t),$$

qu'on résout

$$N(t) = e^{-d(t-t_0)} \varphi(t_0) + e^{-d t} \int_{t_0}^t e^{d\theta} b \varphi(\theta - R) d\theta.$$

On obtient donc :

$$N(t) = \varphi(t), \quad t \in [t_0 - \tau, t_0]$$

$$N(t) = e^{-\lambda(t-t_0)} \varphi(t_0) + b \int_{t_0}^t e^{-\lambda(t-\theta)} \varphi(\theta - \tau) d\theta, \quad t \in (t_0, t_0 + \tau]$$

On peut ensuite résoudre sur $[t_0 + \tau, t_0 + 2\tau]$, en utilisant la condition initiale ci-dessus, et ainsi de suite on résout sur $[t_0, +\infty)$. Il s'agit d'une résolution de proche en proche ("step method"), méthode constructive.

Exemple 2 La 1^{ère} équation à retard (mémoire) a été introduite par V. Volterra en 1928 dans son étude de modèles "proie-prédateur" :

N_1 = nombre de proies

N_2 = nombre de prédateurs

Equation à retard distribué !

$$\begin{cases} N_1'(t) = [b_1 - a_1 N_2(t)] N_1(t) \\ N_2'(t) = \left(\int_{-\tau}^0 k(s) N_1(t+s) ds \right) N_2(t) - b_2 N_2(t) \end{cases}$$

b_1 = taux de naissance des proies

$a_1 N_2$ = taux de mort, lié à la prédation

b_2 = taux de mort des prédateurs

Le taux de naissance des prédateurs dépend de la consommation de proies sur l'intervalle $(t-\tau, t)$,

Quelques exemples de modèles à retard.

Exemple 3 * Guerin et Sédari (2014)

On considère un modèle économique dans lequel il y a 2 secteurs : secteur I ('industrie') et secteur II (agriculture).

On suppose que les travailleurs peuvent passer de II vers I. La quantité de travail est notée L , le capital K .

Alors

$$\begin{cases} K'(t) = s F(K(t), L_0 + \pi(t-\tau)) - \delta K(t) \\ \pi'(t) = G[w(K(t), L_0 + \pi(t-\tau)) - w_0] - H(\pi(t-\tau)) \end{cases}$$

→ L_0 la quantité initiale de travailleurs dans I.

→ s est le taux d'épargne

→ δ le taux de dépréciation du capital

→ w le salaire du secteur I, w_0 le salaire "de survie" du secteur II.

→ la 1^{ère} équation est une équation de type Solow (classique)

Hypothèse ici : τ est le temps nécessaire à une main d'œuvre arrivant en I pour devenir productive.

Exemple 4 * Goodwin (1951)

Soit y le produit national brut, $\varphi(\dot{y})$ l'investissement qui dépend du taux de change $\dot{y}$, α la propension à consommer, et $\varepsilon > 0$ un coefficient d'ajustement. Alors

$$\varepsilon \dot{y}(t) = \varphi(\dot{y}(t-\tau)) - (1-\alpha) y(t)$$

où τ représente le délai entre la décision d'activation et les dépenses correspondantes.

Il s'agit d'une équation différentielle à retard de type neurone : le retard apparaît dans la dérivée.

Exemple 5 * Belair (1993) Roussee and Westervelt (1988)

$$\dot{x}_i(t) = -x_i(t) + \sum_{j=1}^n a_{ij} f(x_j(t-\tau))$$

où $x_i(t)$ est le voltage d'entrée du neurone $i \in \{1, \dots, n\}$,

$f(x)$ une fonction de transfert

a_{ij} décrit la "résistance" entre les neurones i et j

Il s'agit d'un système neuronal.

Exemple 6 * Van den Driessche (1994)

Modèle SIRS : $S \xrightarrow{\lambda IS} I \xrightarrow{\gamma I} R \xrightarrow{P(t)} S$

$$\begin{cases} I'(t) = \lambda I(t)S(t) - (\gamma + b)I(t) \\ R'(t) = R_0(t) + \gamma \int_0^t I(\theta) e^{-b(t-\theta)} P(t-\theta) d\theta \\ S(t) = 1 - I(t) - R(t) \end{cases}$$

où $P(t)$ est la probabilité d'être toujours immunisé au temps t après avoir guéri.

on a un modèle SEIR (tuberculose bronche)

$$S'(t) = b - \lambda I(t)S(t) - bS(t)$$

$$E'(t) = \lambda I(t)S(t) - \lambda e^{-b\tau} I(t-\tau)S(t-\tau) - bE(t)$$

$$I'(t) = \lambda e^{-b\tau} I(t-\tau)S(t-\tau) + \alpha R(t) - (\gamma + b)I(t)$$

et $R(t) = 1 - S(t) - I(t) - E(t)$.

le retard représente le temps nécessaire pour qu'un individu devienne infecté une fois exposé ($\tau \approx 3$ mois).

Exemple 7 Burić et Todorović (2002)

Interacteurs Tumeur / système immunitaire :

- $x(t)$ cellules effectrices
- $y(t)$ cellules tumorales

$$\begin{cases} x'(t) = \alpha_1 f(x(t), y(t-\tau)) - \alpha_2 x(t)y(t) - \alpha_3 x(t) \\ y'(t) = \underbrace{\alpha_4 y(t) - \alpha_5 y(t)^2}_{\text{croissance logistique}} - \underbrace{\alpha_6 x(t)y(t)}_{\text{élimination par le système immunitaire}} \end{cases}$$

Exemple 8 + Culshaw et Ruan (2000)

- $T(t)$ la concentration de $CD4^+$
- $I(t)$ la concentration de $CD4^+$ infectés par HIV
- $V(t)$ la concentration de HIV libre

$$\begin{cases} T'(t) = s - p_T T(t) + r T(t) \left[1 - \frac{T(t) + I(t)}{T_{\max}} \right] - b_2 T(t) V(t) \\ I'(t) = b_2 T(t - \tau) V(t - \tau) - p_I I(t) \\ V'(t) = \alpha I(t) - b_1 T(t) V(t) - p_V V(t) \end{cases}$$

Le retard représente le temps ~~nécessaire~~ entre l'infection d'une cellule T et l'émission de particules virales.

Exemple 9 Goulet et Huang (2005)

Un modèle de réaction diffusion à retard.

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} S(t, x) = D_S \Delta S(t, x) + \alpha S(t, x) \left(1 - \frac{S(t, x)}{s} \right) - K S(t, x) P(t, x) \\ \frac{\partial}{\partial t} P(t, x) = D_P \Delta P(t, x) - \mu P(t, x) - m P^2(t, x) - K S(t, x) P(t, x) \\ \quad + b K e^{-pT} \int_{-\infty}^{\infty} f_T(x, y) S(y, t-T) P(t-T, y) dy \end{cases}$$

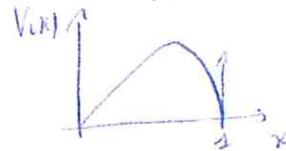
où S est la densité de bactéries susceptibles d'être infectées, et P la densité de virus, et T , le retard, est l'âge maximal d'une bactérie infectée (l'infection induit une durée de vie limitée).

Exercice 10 * Adams, Crauste et Pijo-Nejmet (2006)

Description de la dynamique d'une population cellulaire,
par un modèle d'EDP structuré en maturité:

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t, x) + \frac{\partial}{\partial x} [V(x) u(t, x)] = - (\gamma(x) + \beta(x, u(t, x))) u(t, x) \\ + 2 \int_0^1 (\tau(a(x)), x) u(t - \tau(a(x)), a(x)) \beta(a(x), u(t - \tau(a(x)), a(x)))$$

où $V(x)$ est la vitesse de maturation



telle que

$$\int_0^x \frac{d\theta}{V(\theta)} < \infty \quad \text{et} \quad \int_x^1 \frac{d\theta}{V(\theta)} = +\infty$$

et $a(x)$ est la maturité d'une cellule mère dont
la cellule fille possède une maturité x .

On a : $a(x) < x \quad \forall x \in (0, 1]$

qui implique $\tau(a(x)) > \int_x^1 \frac{d\theta}{V(\theta)}$...

Remarque: On ne traite pas d'EDP à retard dans
cette UE, uniquement les équations différentielles.

Exemple 11 * Barbavossa, Hadasz et Kuttler (2016)

Système d'équations avec retard dépendant de l'état.

$$\begin{cases} u'(t) = \frac{z(t - \tau(u(t))) e^{-p_0 \tau(u(t))}}{1 + \tau'(u(t)) z(t - \tau(u(t))) e^{-p_0 \tau(u(t))}} - p(u(t)) u(t) \\ z(t) = b_1(u(t)) u(t) + b_2(u(t)) z(t - \tau(u(t))) e^{-p_0 \tau(u(t))} \end{cases}$$

où b est un taux de naissance, p un taux de mort et $u(t)$ le nombre total d'individus. Le retard τ dépend du nombre d'individus et représente l'âge minimal auquel un individu peut se reproduire.

Dans le cas où τ est constant on obtient

$$\begin{cases} u'(t) = z(t - \tau) e^{-p_0 \tau} - p(u(t)) u(t) \\ z(t) = b_1(u(t)) u(t) + b_2(u(t)) z(t - \tau) e^{-p_0 \tau} \end{cases}$$

II) Équations structurées en âge et équations à retard.

Il existe un lien entre équations à retard et EDP structurées en âge. Ce lien souligne le fait qu'une équation à retard est un problème en dimension infinie, comme une EDP, et non en dimension finie, comme une EDO. Il faut faire attention. L'EDP et la EDO possèdent beaucoup de propriétés similaires, et faut toutefois faire attention aux différences !

Considérons une équation structurée en âge "classique" (équations de renouvellement) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} u(t, a) + \frac{\partial}{\partial a} u(t, a) = -\lambda(t) u(t, a), \quad a \in (0, A) \\ u(t, 0) = b \left(\int_0^A u(t, a) da \right), \quad t > 0 \\ u(0, a) = u_0(a), \quad a \in (0, A) \end{array} \right.$$

où $A \leq +\infty$ et toutes les fonctions / densités ~~sont~~ possèdent la régularité nécessaire pour que le système soit bien posé et les calculs qui suivent autorisés.

On notera dans la suite

$$U(t) = \int_0^A u(t, a) da, \quad t > 0.$$

L'intégration de l'EDP par rapport à l'âge entre 0 et A donne :

$$\frac{d}{dt} U(t) + u(t, A) - u(t, 0) = -\lambda(t) U(t), \quad t > 0.$$

Déterminons $u(t, A)$ pour $t > 0$.

en supposant $u_0(a)$ suffisamment régulière et telle que

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} u_0(a) = 0 \quad \text{si } A = +\infty$$

on montre que [A faire]

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} u(t, a) = 0 \quad \text{si } A = +\infty.$$

Si $A < +\infty$, la question ne se pose pas. On utilise la méthode des caractéristiques [A faire] :

$$u(t, A) = \begin{cases} e^{-\int_0^t \alpha(\theta) d\theta} u_0(A-t), & \text{si } A > t, \\ e^{-\int_{t-A}^t \alpha(\theta) d\theta} u(t-A, 0), & \text{si } A \leq t \end{cases}$$

On en déduit

$$\frac{d}{dt} |u(t)| = -\alpha(t) |u(t)| + f(|u(t)|) = \begin{cases} e^{-\int_0^t \alpha(\theta) d\theta} u_0(A-t), & \text{si } t < A \\ e^{-\int_{t-A}^t \alpha(\theta) d\theta} f(|u(t-A)|), & \text{si } t \geq A \end{cases}$$

Pour $t \geq A$, on obtient une équation à retard.

Pour $t \in [0, A)$, $u(t)$ est solution d'une équation différentielle non-linéaire et non-autonome. Par le théorème de Cauchy-Lipschitz on obtient facilement l'existence d'une unique solution vérifiant

$$u(0) = \int_0^A u_0(a) da.$$

Si on note $\varphi(t)$ la solution sur $[0, A]$, alors pour $t \geq A$, $u(t)$ doit vérifier

$$\begin{cases} u'(t) = -\alpha(t) u(t) + f(u(t)) - e^{-\int_{t-A}^t \alpha(s) ds} f(u(t-A)) \\ u(t) = \varphi(t), \quad t \in [0, A] \end{cases}$$

On montre [A page] qu'il y a équivalence entre l'EDP structurée au âge et le système à retard ci-dessus

ATTENTION: Si on ne prend pas la condition initiale, il n'y a pas équivalence ! Ça paraît anecdotique, mais c'est une propriété essentielle.

Exemple $\alpha(t) = \alpha, \forall t > 0$ et ~~$f(u(t)) = 2 \int_0^A \beta(a, u(t, a)) da$~~
 $f(u(t)) = 2 \beta(u(t)) u(t)$ où β est le taux de division de la population de cellules considérée. Alors

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u(t, a) + \frac{\partial}{\partial a} u(t, a) = -\alpha u(t, a), & t > 0, a \in (0, A) \\ u(t, 0) = 2 \beta(u(t)) u(t), & t > 0 \\ u(0, a) = u_0(a), & a \in (0, A) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u'(t) = -\alpha u(t) + 2 \beta(u(t)) u(t) - 2 e^{-\alpha A} \beta(u(t-A)) u(t-A), t > 0 \\ u(t) = \varphi(t), \quad t \in [0, A] \end{cases}$$

EQUATION DE TACKY-GLASS (1977)

On s'intéresse au mécanisme (général) de production de cellules du sang. On note $y(t)$ la densité de cellules circulantes au temps t . Le mécanisme de production des cellules est supposé dépendant d'un certain délai: les modifications à l'instant t de la densité de cellules ne produisant un effet qu'au temps $t + \tau$, $\tau > 0$.



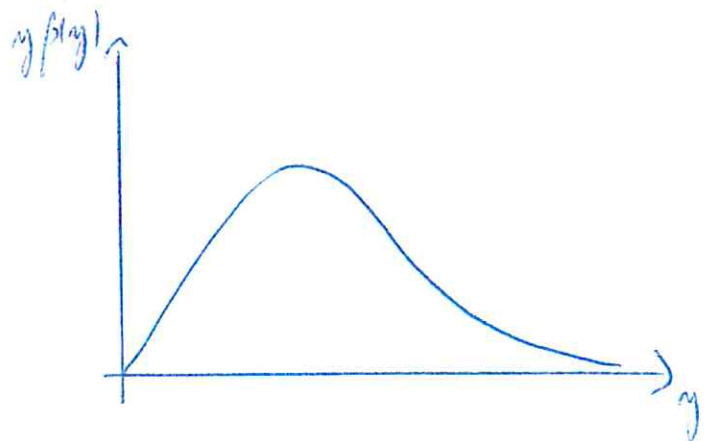
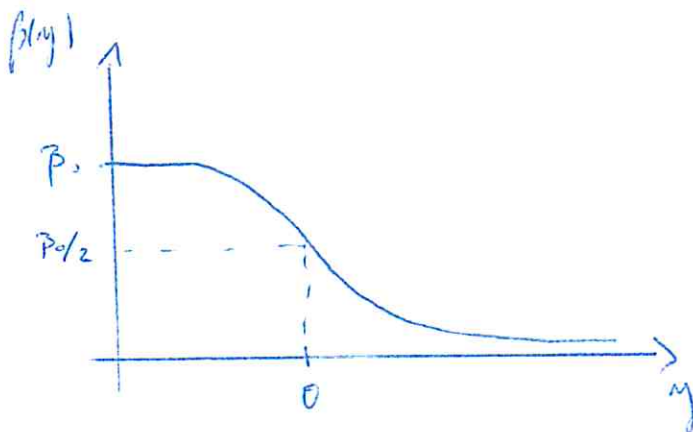
L'équation de Tackey-Glass s'écrit:

$$\frac{dy}{dt}(t) = \beta(y(t-\tau)) y(t-\tau) - \gamma y(t)$$

où le temps de production dépend de la densité de cellules au temps $t - \tau$

On considère le cas:

$$\frac{dy}{dt} y(t) = \beta_0 \frac{e^a}{0^a + y^a(t-\tau)} y(t-\tau) - \gamma y(t)$$



On "normalise" l'équation de Ratchey-Glass en posant $y(t) = \theta x(t)$
On obtient :

$$x'(t) = \frac{1}{\theta} y'(t) = \frac{\beta_0}{\theta} \frac{\theta^n}{\theta^n + \theta^n x^n(t-\tau)} \theta x(t-\tau) - \frac{\gamma}{\theta} \theta x(t)$$

d'où

$$\boxed{x'(t) = \beta_0 \frac{x(t-\tau)}{1 + x^n(t-\tau)} - \gamma x(t)} \quad (16)$$

Dans la suite j'utiliserai β plutôt que β_0 .

Remarque 1 : Les fonctions $x \mapsto \beta \frac{x}{1+x^n}$ et $x \mapsto \gamma x$ sont suffisamment régulières pour avoir existence et unicité d'une solution pour $t \geq 0$, à condition de fournir (16) d'une condition initiale $x(t) = x_0(t)$ pour $t \in [-\tau, 0]$.

1/ Positivité ?

Etant donnée une condition initiale $x_0(t)$, $t \in [-\tau, 0]$, positive, la solution de (16) est-elle positive ?

Supposons qu'il existe $T > 0$ tel que

$$x(t) > 0 \quad \forall t < T, \quad \text{et} \quad x(T) = 0.$$

Alors

$$x'(T) = \beta \frac{x(T-\tau)}{1 + x^n(T-\tau)} > 0 \quad \text{car } T-\tau < T.$$

On en déduit que $x(t) > 0$, $\forall t \geq 0$.

Remarque 2 : Le retard favorise la positivité dans ce cas car il est inclus dans un terme de production, positif.

Lorsque le retard intervient dans un terme "négatif" la situation

2/ Etats d'équilibre ?

Il s'agit de solutions indépendantes du temps, c'est-à-dire constantes ici. Soit $\bar{x}$ un état d'équilibre d (116). Alors

$$\gamma \bar{x} = \beta \frac{\bar{x}}{1 + \bar{x}^n}.$$

Donc $\bar{x} = 0$ ou $\frac{\beta}{1 + \bar{x}^n} = \gamma.$

d'état d'équilibre "trivial", $\bar{x} = 0$, existe toujours. Un état d'équilibre positif existe si et seulement si l'équation $\frac{\beta}{1 + \bar{x}^n} = \gamma$ possède une solution.

On voit que si une solution existe alors

$$1 + \bar{x}^n = \frac{\beta}{\gamma}$$

soit $\bar{x}^n = \frac{\beta}{\gamma} - 1.$

Il est nécessaire que $\boxed{\beta > \gamma}$ pour obtenir une solution, qui est alors unique et donnée par $\bar{x} = \left(\frac{\beta - \gamma}{\gamma} \right)^{1/n}.$

Conclusion l'équation (116) possède un état d'équilibre trivial, $\bar{x} = 0$, et un état d'équilibre positif unique $x = x^*$ si et seulement si $\beta > \gamma$. On a alors

$$x^* = \left(\frac{\beta - \gamma}{\gamma} \right)^{1/n}.$$

On s'intéresse à la stabilité des états d'équilibre. Un état d'équilibre stable attire les solutions.

→ si $\bar{x} = 0$ est stable alors la population de cellules disparaît.

→ si $\bar{x} = x^*$ est stable alors la population de cellules se maintient.

Comment déterminer la stabilité d'un état d'équilibre ?

Cas d'une équation sans retard ...

Si on suppose $\tau = 0$ alors (116) s'écrit

$$x'(t) = \left(\frac{\beta}{1 + x^n(t)} - \gamma \right) x(t), \quad t \geq 0 \quad (*)$$

Cette équation possède les mêmes états d'équilibre que l'équation (116).

De plus, on détermine facilement que

$$x'(t) > 0 \quad \text{ssi} \quad \frac{\beta}{1 + x^n(t)} > \gamma$$

Or, par définition,

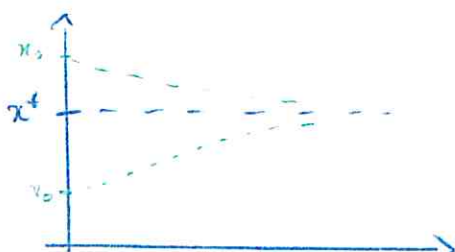
$$\gamma = \frac{\beta}{1 + x^{*n}} \quad \text{lorsque} \quad \beta > \gamma.$$

Ainsi :

1^{er} cas $\beta > \gamma$.

$$\text{On a dans ce cas} \quad x'(t) > 0 \quad \text{ssi} \quad \frac{\beta}{1 + x^n(t)} > \gamma = \frac{\beta}{1 + x^{*n}}$$

$$\text{i.e.} \quad x'(t) > 0 \quad (\Leftrightarrow) \quad x(t) < x^*.$$



Donc :

$$\begin{cases} x(0) > x^* \Rightarrow x'(t) < 0 \\ x(0) < x^* \Rightarrow x'(t) > 0 \end{cases}$$

Si on part d'une condition initiale plus grande (resp. petite) que x^* , alors $x(t)$ décroît (resp. croît).

On a alors 2 possibilités.

- soit $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = x^*$

- soit $\exists T > 0$ tel que $x(T) = x^*$.

Le deuxième cas n'est pas possible: $x(t)$ et $t \mapsto x^*$ sont 2 solutions de la même équation, si elles sont égales en 1 point elles vérifient les conditions du théorème de Cauchy-Lipschitz, et sont donc égales (unique solution).

On obtient donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = x^*$

2^e cas $\beta < \gamma$.

Alors $\forall t > 0$, $\frac{\beta}{1+x^n(t)} \leq \beta < \gamma$ donc $x'(t) < 0$.

Comme précédemment, on obtient $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$.

Conclusion :

- $\beta < \gamma \Rightarrow \forall x_0 \in \mathbb{R}^+$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$

- $\beta > \gamma \Rightarrow \forall x_0 \in \mathbb{R}^+$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = x^*$

On a déterminé exactement la stabilité de (*).

Peut-on transposer ça à l'équation (16)? Et de façon générale à une équation à retard?

Retour à l'étude de la stabilité de (TG)

On n'a pas dans ce cas les mêmes propriétés ("si les solutions existent, elles sont égales"), on ne peut pas (ou rarement) prouver la convergence vers un état d'équilibre directement.

On s'intéresse donc à la stabilité locale d'un état d'équilibre, basée sur l'étude de l'équation linéarisée et des valeurs propres.

Linéarisation

Soit $\bar{x}$ un état d'équilibre de (TG). On pose :

$$u(t) = x(t) - \bar{x}.$$

perturbat?

Alors :

$$u'(t) = x'(t) = \beta \frac{x(t-\tau)}{1 + x^n(t-\tau)} - \gamma x(t)$$

$$= \beta \frac{x(t-\tau)}{1 + x^n(t-\tau)} - \gamma (u(t) + \bar{x})$$

$$= \beta \frac{x(t-\tau)}{1 + x^n(t-\tau)} - \gamma \bar{x} - \gamma u(t)$$

$$= \underbrace{\beta \frac{x(t-\tau)}{1 + x^n(t-\tau)}}_{f(x(t-\tau))} - \underbrace{\beta \frac{\bar{x}}{1 + \bar{x}^n}}_{f(\bar{x})} - \gamma u(t)$$

$$= f(x(t-\tau)) - f(\bar{x}) - \gamma u(t)$$

$$= f'(\bar{x}) (x(t-\tau) - \bar{x}) + o(x(t-\tau) - \bar{x}) - \gamma u(t)$$

$$= f'(\bar{x}) u(t-\tau) + o(u(t-\tau)) - \gamma u(t)$$

l'équation linéarisée :

$$u'(t) = f'(\bar{x}) u(t-\tau) - \gamma u(t) \quad (L)$$

i.e.

$$u'(t) = \beta \frac{1 - (n-1)\bar{x}^n}{(1+\bar{x}^n)^2} u(t-\tau) - \gamma u(t)$$

Équation caractéristique

En cherchant des solutions de la forme $u(t) = C e^{\lambda t}$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $C \neq 0$, on obtient l'équation caractéristique [Bellman et Cooke, 1963]

Soit $u(t) = C e^{\lambda t}$ une solution de (L). Alors

$$\lambda C e^{\lambda t} = f'(\bar{x}) C e^{\lambda(t-\tau)} - \gamma C e^{\lambda t}$$

d'où

$$C e^{\lambda t} [\lambda + \gamma - f'(\bar{x}) e^{-\lambda \tau}] = 0.$$

On en déduit l'équation caractéristique

$$\boxed{\lambda + \gamma - f'(\bar{x}) e^{-\lambda \tau} = 0} \quad \lambda \in \mathbb{C} \quad (C)$$

Dans le cas d'une EDO, l'équation caractéristique s'écrit

$$\lambda + \gamma = 0.$$

Dans le cas EDR, on obtient un polynôme exponentiel de degré 1, dont les racines sont difficiles à déterminer.

$$\lambda + a - b e^{-\lambda \tau} = 0.$$

L'équation (c) s'écrit $\lambda + a + b e^{-\lambda \tau} = 0$ avec

$$a = \gamma \quad \text{et} \quad b = f'(\bar{x}).$$

Donc, l'état d'équilibre $\bar{x}$ est localement asymptotiquement stable si et seulement si

$$f'(\bar{x}) < \gamma \quad \text{et} \quad -f'(\bar{x})\tau < p \sin(p) - \gamma\tau \cos(p)$$

où $p = -\gamma\tau \tan(p)$, $p \in (0, \pi)$.

Cas 1: ~~$\bar{x} = 0$~~ $\bar{x} = 0$

Alors $f'(0) = \beta$, donc $x = 0$ est L.A.S. si

$$\beta < \gamma \quad \text{et} \quad -\beta\tau < p \sin(p) - \gamma\tau \cos(p)$$

Remarque: lorsque l'équation (16) possède 2 états d'équilibre, i.e. lorsque $\beta > \gamma$, alors $x = 0$ est instable.

Cas 2: $\bar{x} = x^*$, et $\beta > \gamma$ (condition d'existence)

$$\text{Alors } f'(x^*) = \frac{\gamma^2}{\beta^2} \left[1 - (n-1) \left(\frac{\beta}{\gamma} - 1 \right) \right]$$

On obtient des conditions pour la stabilité locale:

$$f'(x^*) < \gamma \quad \text{et} \quad -f'(x^*)\tau < p \sin(p) - \gamma\tau \cos(p).$$

Il s'agit dans les deux cas de conditions nécessaires et suffisantes pour la stabilité locale asymptotique. On voit que la stabilité dépend notamment du retard τ . On voit aussi que la troisième condition (avec $\cos(p)$, $\sin(p)$) n'est pas très "pratique".

THÉORÈME DE HAYES

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $S = \{z \in \mathbb{C} \mid (z + \alpha)e^z + \beta = 0\}$.

Alors, $\forall z \in S$,

$$\operatorname{Re}(z) < 0 \quad \text{ssi} \quad \begin{cases} \alpha > -1 \\ \alpha + \beta > 0 \\ \beta < \frac{1}{2} p \sin(p) - \alpha \cos(p) \end{cases}$$

où p est l'unique racine de l'équation

$$\begin{cases} p = -\alpha \tan(p), & 0 < p < \pi & \text{si } \alpha \neq 0 \\ p = \frac{\pi}{2} & & \text{si } \alpha = 0 \end{cases}$$

L'équation $\lambda + a - b e^{-\lambda \tau} = 0$ peut être ré-écrite :

$$\begin{aligned} \text{Posons } z = \lambda \tau : & \quad \lambda \tau + a \tau - b \tau e^{-\lambda \tau} = 0 \\ \text{c) } & \quad z + a \tau - b \tau e^{-z} = 0 \\ \text{e) } & \quad (z + a \tau) e^z - b \tau = 0 \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= a \tau \\ \beta &= -b \tau \end{aligned} \right\} : \quad \text{c) } (z + \alpha) e^z + \beta = 0.$$

Ainsi, les racines de $\lambda + a - b e^{-\lambda \tau} = 0$ sont à parties réelles strictement négatives si et seulement si

$$\begin{cases} a \tau > -1 \\ a \tau - b \tau > 0 \\ -b \tau < p \sin(p) - a \tau \cos(p) \end{cases} \quad \text{où} \quad p = -a \tau \tan(p), \quad p \in (0, \pi)$$

c'est-à-dire :

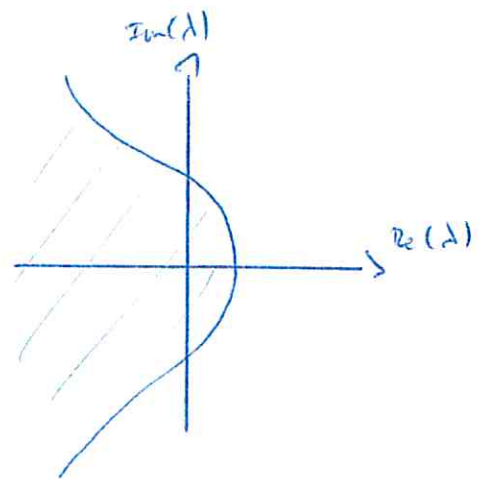
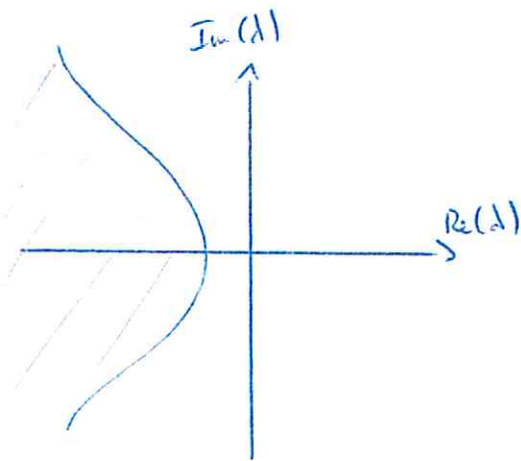
$$a > b \quad \text{et} \quad -b \tau < p \sin(p) - a \tau \cos(p)$$

Pour obtenir la stabilité globale (G.A.S.) d'un état d'équilibre, deux méthodes

- "à la main", en utilisant les propriétés de l'équation (monotone par exemple) pour obtenir la convergence.
- déterminer une fonction de Lyapunov (F. séance 2)

Dans le cas de la stabilité locale, on peut chercher des conditions sur un paramètre (le retard par exemple) plus "précises", et qui se généralisent à des équations caractéristiques d'ordre plus élevé que (C).

Toujours d'après Bellman et Cooke (1963), on voit qu'une équation à retard stable (L.A.S.) ne peut être déstabilisée que par l'apparition de valeurs propres imaginaires pures



Considérons le cas $\beta > \gamma$ et la stabilité de $\bar{x} = x^*$.

Supposons que $\lambda = i\omega$, $\omega \in \mathbb{R}$, est valeur propre de

$$\lambda + \gamma = f'(\bar{x}) e^{-\lambda c} = 0.$$

~~En séparant parties~~

En séparant parties réelles et imaginaires on obtient

$$\begin{cases} \gamma - f'(\bar{x}) \cos(\omega c) = 0 \\ \omega + f'(\bar{x}) \sin(\omega c) = 0 \end{cases} \quad (S)$$

On remarque que $-i\omega$ est également solution, on a donc toujours une paire de valeurs propres conjuguées, et on cherche $\omega > 0$.

On remarque également que $\lambda = 0$ est valeur propre ssi

$$\gamma = f'(\bar{x})$$

qui est un cas critique qu'on ne considère pas.

D'après (S), il est nécessaire que

$$\cos^2(\omega c) + \sin^2(\omega c) = 1 \quad \text{ie} \quad \left(\frac{f'(\bar{x})}{\gamma} \right)^2 + \frac{\omega^2}{\gamma^2} = 1.$$

On en déduit que nécessairement

$$\omega = \omega_c = \sqrt{f'(\bar{x})^2 - \gamma^2} \quad \text{et} \quad f'(\bar{x}) > \gamma.$$

On obtient une partie de la condition de stabilité: si $f'(\bar{x}) < \gamma$ alors le système a peu de chances d'être instable.

En utilisant w_c dans (5) on obtient:

$$\cos(w_c \tau) = \frac{\gamma}{f'(x^*)} \quad \text{et} \quad \sin(w_c \tau) = - \frac{w_c}{f'(x^*)}$$

d'où :

$$w_c \tau = \begin{cases} \arccos\left(\frac{\gamma}{f'(x^*)}\right) + 2k\pi, & k \in \mathbb{N} & \text{si } \sin(w_c \tau) > 0 \\ 2\pi - \arccos\left(\frac{\gamma}{f'(x^*)}\right) + 2k\pi, & k \in \mathbb{N} & \text{si } \sin(w_c \tau) < 0 \end{cases}$$

i.e :

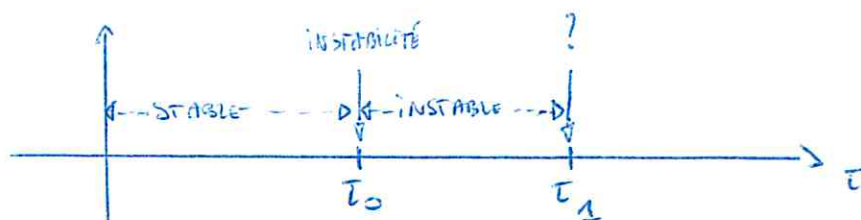
$$\tau = \begin{cases} \frac{1}{w_c} \arccos\left(\frac{\gamma}{f'(x^*)}\right) + \frac{2k\pi}{w_c}, & k \in \mathbb{N}, & \text{si } f'(x^*) < 0 \\ \frac{2\pi}{w_c} - \frac{1}{w_c} \arccos\left(\frac{\gamma}{f'(x^*)}\right) + \frac{2k\pi}{w_c}, & k \in \mathbb{N}, & \text{si } f'(x^*) > 0 \end{cases}$$

On définit une suite $(\tau_k)_{k \in \mathbb{N}}$ pour laquelle des valeurs propres imaginaires pures existent. L'état d'équilibre $\bar{x} = x^*$ ne peut se déstabiliser que si $\tau = \tau_k, k \in \mathbb{N}$.
On sait que pour $\tau = 0$, $\bar{x} = x^*$ est stable (cf. équation sans retard).

Remarque: On doit supposer $f'(x^*) > \gamma$ donc $f'(x^*) > 0$.

Les seules valeurs de τ_k acceptables sont donc

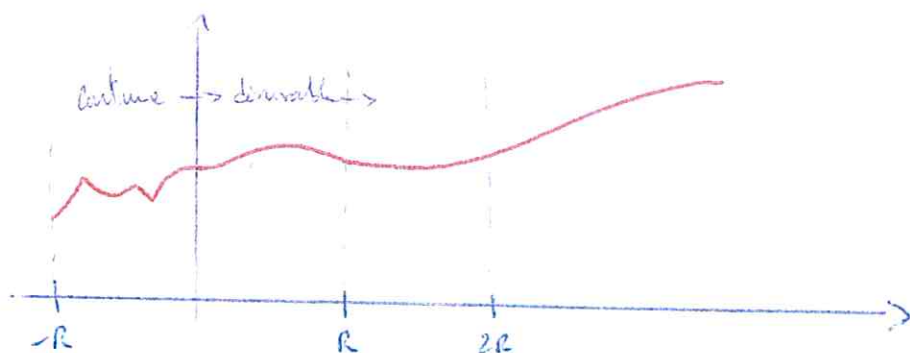
$$\tau_k = \frac{1}{w_c} \left[2\pi - \arccos\left(\frac{\gamma}{f'(x^*)}\right) + 2k\pi \right], \quad k \in \mathbb{N}$$



On considère le problème de Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x_t), & t \geq 0 \\ x(t) = \varphi(t), & \forall t \in [-R, 0] \end{cases} \quad (PC)$$

où $\varphi \in C$ est donnée et $f: I \times C \rightarrow \mathbb{R}^n$.



φ est continue
 $\Downarrow$
 x est C^1 sur $[0, R]$
 $\Downarrow$
 x est C^2 sur $[R, 2R]$
 $\Downarrow$
 etc.

Définition

On appelle solution de (PC) pour la condition initiale $\varphi \in C$ toute fonction $x: [-R, a) \rightarrow \mathbb{R}^n$, $0 < a \leq \infty$, qui satisfait les propriétés suivantes :

- (i) x est continue sur $[-R, a)$
- (ii) $x(t) = \varphi(t)$ pour tout $t \in [-R, 0]$
- (iii) x satisfait l'équation $x'(t) = f(t, x_t)$ pour $t \in [0, a)$ (on considère la dérivée à droite en $t = 0$)

Théorème [existence locale]

Soit $b > 0$ et $f: [0, b] \times C \rightarrow \mathbb{R}^n$ continue.

Alors $\forall \varphi \in C$, il existe $a \in (0, b]$ tel que (PC) admet une solution sur $[-R, a]$

(en fait sur $[0, a]$, car φ est solution sur $[-R, 0]$).

Théorème [solution globale]

Soit $f: [0, +\infty) \times C \rightarrow \mathbb{R}^n$ continue et bornée
(l'image tout borné de $[0, +\infty) \times C$ est bornée dans $\mathbb{R}^n$).

Soit x une solution maximale de (PC) (note:
d'après le lemme de Zou, une telle solution existe
avec l'ade quel $x \text{ sur } \mathbb{R} \Leftrightarrow D(x) \subseteq D(y)$ et $y|_{D(x)} = x$)

Alors $D(x) = [-R, a)$ et:

- si $a = +\infty$, x est une solution globale
- si $a < +\infty$, alors $\limsup_{t \rightarrow a} \|x(t)\| = +\infty$

Théorème [unicité]

Soit $f: (t, \varphi) \in [0, b] \times C \rightarrow \mathbb{R}^n$ continue, localement
lipschitzienne en φ et uniformément en t .

Alors le problème (PC) possède une et une seule solution
pour tout $\varphi \in C$. De plus, l'application

$$\varphi \in C \rightarrow x_t^\varphi \in C$$

est localement lipschitzienne.

Rappel: f localement lipschitzienne en φ , uniformément en t

$$\Leftrightarrow \forall \varphi_0 \in C, \exists \delta > 0, \exists \kappa > 0 \text{ tel que } \forall \varphi, \psi \in \overline{B}(\varphi_0, \delta)$$

$$\|f(t, \varphi) - f(t, \psi)\| \leq \kappa \|\varphi - \psi\|_\infty$$

COROLLAIRE

Si $f: [0, +\infty) \times C \rightarrow \mathbb{R}^n$ est continue et lipschitzienne en φ , uniformément en t , alors (PC) admet, pour tout $\varphi \in C$, une et une seule solution définie sur $[-R, +\infty)$, c'est-à-dire globale.

Cas d'une équation autonome (*)

$$x'(t) = f(x_t), \quad f: C \rightarrow \mathbb{R}^n$$

On suppose f suffisamment régulière pour avoir existence et unicité d'une solution pour toute condition initiale $\varphi \in C$.

Soient les deux problèmes de Cauchy :

$$\begin{cases} x'(t) = f(x_t), & t \geq t_0 \\ x(t) = \varphi(t - t_0), & t \in [t_0 - R, t_0] \end{cases} \quad (PC_1)$$

$$\begin{cases} y'(t) = f(y_t), & t \geq t_1 \\ y(t) = \varphi(t - t_1), & t \in [t_1 - R, t_1] \end{cases} \quad (PC_2)$$

avec $t_1 > t_0$.

Alors

$$y(t) = x(t + t_0 - t_1), \quad \forall t \geq t_1.$$

Dans le cas autonome on initialise donc en général la solution à $t_0 = 0$.

[et on définit une famille d'opérateurs solution

$$T(t): \varphi \in C \rightarrow T(t)\varphi = x_t \in C$$

et $(T(t))_{t \geq 0}$ est un semi-groupe non-linéaire fortement continu sur C

si $T(0) = \text{Id}_C$, $T(t+s) = T(t)T(s)$ et $t \mapsto T(t)\varphi$ est continue sur $[0, +\infty)$ $\forall \varphi \in C$]



Linéarisation autour d'une solution particulière

On considère l'équation (1) et on suppose que l'application $\varphi \in C \mapsto f(t, \varphi) \in \mathbb{R}^n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ pour tout $t \geq 0$.

Soit y une solution particulière de (1).

On considère l'opérateur $Df(t, \varphi)$ défini par

$$\forall \varphi \in C, \quad Df(t, \varphi) \varphi = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [f(t, \varphi + h\varphi) - f(t, \varphi)].$$

Alors $\forall t \geq 0, \forall \varphi \in C, \quad Df(t, \varphi): C \rightarrow \mathbb{R}^n$ est linéaire et continu. On appelle équation linéaire associée à (1) autour de la solution y , ou équation (1) linéarisée autour de y , l'équation

$$\boxed{x'(t) = Df(t, y_t) x_t = L(t) x_t, \quad t \geq 0} \quad (2)$$

Exemple 3 $x'(t) = a(t) x(t-1) (1 - x(t)^2)$

Les solutions particulières sont $y \equiv 0$, $y \equiv -1$ et $y \equiv 1$.

De plus, $f(t, \varphi) = a(t) \varphi(t-1) (1 - \varphi(t)^2)$, $\forall t \geq 0, \forall \varphi \in C$.

On détermine $L(t)$: soit $\varphi \in C$,

$$f(t, \varphi + h\varphi) - f(t, \varphi) =$$

$$a(t) (\varphi(t-1) + h\varphi(t-1)) [1 - (\varphi(t) + h\varphi(t))^2] - a(t) \varphi(t-1) (1 - \varphi(t)^2) =$$

$$a(t) (\varphi(t-1) + h\varphi(t-1)) (1 - \varphi(t)^2 - 2h\varphi(t) - h^2\varphi(t)^2) -$$

$$- a(t) \varphi(t-1) (1 - \varphi(t)^2) =$$

$$\begin{aligned}
 & a(t) \varphi(-1) (1 - \varphi^2(0)) - a(t) \varphi(-1) (1 - \varphi^2(0)) \\
 & + a(t) \varphi(-1) (-h^2 \varphi^2(0) - 2h \varphi(0) \varphi(0)) \\
 & + a(t) h \varphi(-1) (1 - \varphi^2(0) - h^2 \varphi^2(0) - 2h \varphi(0) \varphi(0)) = \\
 & h a(t) [-2 \varphi(0) \varphi(0) \varphi(-1) - h \varphi^2(0) \varphi(-1) + \varphi(-1) (1 - \varphi^2(0)) \\
 & - h^2 \varphi^2(0) \varphi(-1) - 2h \varphi(0) \varphi(0) \varphi(-1)]
 \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [f(t, \varphi + h\psi) - f(t, \varphi)] \\
 = a(t) [\varphi(-1) (1 - \varphi^2(0)) - 2 \varphi(0) \varphi(-1) \varphi(0)]
 \end{aligned}$$

Donc :

$$\boxed{Df(t, \varphi) \psi = a(t) [\varphi(-1) (1 - \varphi^2(0)) - 2 \varphi(0) \varphi(-1) \varphi(0)]}$$

$$\rightarrow y = 0, \quad Df(t, y_t) x_t = a(t) x_t(-1)$$

$$\text{i.e.} \quad x'(t) = a(t) x(t-1)$$

$$\rightarrow y = -1, \quad Df(t, y_t) x_t = -2 a(t) x_t(0)$$

$$\text{i.e.} \quad x'(t) = -2 a(t) x(t)$$

$$\rightarrow y = 1, \quad Df(t, y_t) x_t = -2 a(t) x_t(0)$$

$$\text{i.e.} \quad x'(t) = -2 a(t) x(t)$$

On peut reconnaître les parties linéaires et "non-linéaires dérivées" de l'équation de départ.

Equation caractéristique et stabilité

On s'intéresse à l'équation linéaire (2),

$$x'(t) = L(t) x_t, \quad t \geq 0. \quad (2)$$

Définition

La solution $x \equiv 0$ de (2) est dite stable si ~~si~~, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tel que

$$\| \varphi \|_\infty < \delta \Rightarrow \| x_t^\varphi \|_\infty < \varepsilon \quad \forall t \geq 0.$$

Cette solution est dite asymptotiquement stable si elle est stable et $\exists \Delta > 0$ tel que

$$\| \varphi \|_\infty < \Delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} \| x_t^\varphi \|_\infty = 0.$$

Remarque La stabilité ou stabilité asymptotique de (2) entraîne la stabilité locale ou stabilité asymptotique locale (LAS) de (1).

On considère une équation linéaire autonome,

$$x'(t) = L \cdot x_t, \quad t \geq 0. \quad (3)$$

On admettra le résultat suivant:

Théorème [stabilité asymptotique]

La solution $x \equiv 0$ de (3) est asymptotiquement stable si et seulement si toutes ses valeurs propres sont à parties réelles négatives.

Attention: Il y a une infinité de valeurs propres !

Afin d'étudier les valeurs propres de (3) on détermine l'équation caractéristique. Pour cela on cherche des solutions de la forme $v e^{\lambda t}$, $\lambda \in \mathbb{C}$ et $v \in \mathbb{R}^n$ on obtient une équation de la forme

$$\Delta(\lambda) v = 0$$

par laquelle on cherche des solutions $v \neq 0$.

[si on écrit $L\varphi = \int_{-r}^0 \Delta\eta(\theta) \varphi(\theta)$, $\varphi \in C$ et $\eta \in BV([-r, 0])$, (d'après le théorème de représentation de Riesz), alors

$$\Delta(\lambda) v = \lambda v - \int_{-r}^0 \Delta\eta(\theta) (e^{\lambda\theta} v)]$$

Théorème [Bifurcation de Hopf]

Supposons que (3) s'écrit $x'(t) = L(\alpha) x_t$, $t \geq 0$ (4) où $\alpha \in \mathbb{R}$ [paramètre de bifurcation], et que cette équation possède une valeur propre λ_0 imaginaire pure, simple (multiplicité = 1) pour $\alpha = 0$ et que toutes les autres valeurs propres ne sont pas des multiples entiers de λ_0 . Supposons également que la branche de valeurs propres $\lambda(\alpha)$ vérifiant $\lambda(0) = \lambda_0$ est telle que

$$\operatorname{Re}(\lambda'(0)) \neq 0.$$

Alors pour α proche de zéro l'équation (4) possède des solutions périodiques non-triviales, de période proche de $\frac{2\pi}{\operatorname{Im}(\lambda_0)}$

Exemple 4. $x'(t) = -a x(t-1)(1-x(t)^2)$, $a \in (\mathbb{R}^*)$

Comme à l'exemple 3, que $x \equiv 0$ est une solution particulière (état d'équilibre) et que la linéarisation autour de $x \equiv 0$ aboutit à

$$x'(t) = -a x(t-1).$$

1)

On cherche l'équation caractéristique. Pour cela on suppose que $x(t) = e^{\lambda t} v$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $v \in \mathbb{R}^n$ est solution :

$$\lambda e^{\lambda t} v = -a e^{\lambda(t-1)} v$$

d'où

$$e^{\lambda t} v [\lambda + a e^{-\lambda}] = 0.$$

On obtient l'équation caractéristique :

$$\lambda + a e^{-\lambda} = 0.$$

On va utiliser a comme paramètre de bifurcation.

2) Soit $\lambda = p + iw$ une valeur propre. Alors :

$$p + iw + a e^{-p-iw} = 0$$

i.e

$$p + iw + a e^{-p} [\cos(-w) + i \sin(-w)] = 0$$

d'où :

$$p + iw + a e^{-p} [\cos(w) - i \sin(w)] = 0.$$

En séparant parties réelles et imaginaires on obtient :

$$\begin{cases} p + ae^{-p} \cos(\omega) = 0 \\ \omega - ae^{-p} \sin(\omega) = 0 \end{cases} \quad (*)$$

Remarquons que si (p, ω) est solution de (*) alors $(p, -\omega)$ l'est également.

Supposons qu'il existe $a_0 \in (\mathbb{R}^*)^+$ tel que $p = 0$. Alors

$$a_0 \cos(\omega) = 0 \quad \text{et} \quad \omega - a_0 \sin(\omega) = 0$$

Comme $a_0 \neq 0$ on en déduit $\omega = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{N}^*$.

En utilisant la 2^{de} équation on obtient

$$a_0 = \frac{\omega}{\sin(\omega)} = \frac{\frac{\pi}{2} + k\pi}{\sin(\frac{\pi}{2} + k\pi)} = (-1)^k \left(\frac{\pi}{2} + k\pi \right) \quad k \text{ pair}$$

i.e :

$$a_0 = + \frac{\pi}{2}, \left(\frac{3\pi}{2} \right), + \frac{5\pi}{2}, \left(\frac{7\pi}{2} \right), \dots$$

Ainsi, si $a_0 = + \frac{\pi}{2}$ alors $\pm i \frac{\pi}{2}$ sont valeurs propres.

3) Montrons que toutes les valeurs propres sont à parties réelles négatives si $0 < a < \frac{\pi}{2}$.

Soit $0 < a < \frac{\pi}{2}$ et $\lambda = p + i\omega$ une valeur propre.

Supposons $p > 0$.

Alors $e^{-p} < 1$ et $\omega = ae^{-p} \sin(\omega) < a < \frac{\pi}{2}$.

Comme $\omega > 0$ alors $\cos(\omega) > 0$ et donc, d'après (*),

On obtient une contradiction.

Ainsi $p < 0$.

Or on ne peut pas obtenir $p = 0$ car $a < a_0$ qui est la plus petite valeur pour laquelle il existe une paire de valeurs propres imaginaires pures.

Conclusion: $p < 0$.

L'équation linéaire est donc asymptotiquement stable lorsque $0 < a < \frac{\pi}{2}$, et l'état d'équilibre $x \equiv 0$ est localement asymptotiquement stable.

4) Supposons $a = \frac{\pi}{2}$ et montrons que les hypothèses du Théorème de bifurcation de Hopf sont vérifiées.

D'abord, lorsque $a = a_0 = \frac{\pi}{2}$, $\pm i \frac{\pi}{2}$ sont les seules valeurs propres imaginaires pures.

Considérons la branche de valeurs propres $\lambda(a) = p(a) + i\omega(a)$ telle que $\lambda(a_0) = i \frac{\pi}{2}$. Alors

$$\lambda(a) + a e^{-\lambda(a)} = 0.$$

En dérivant par rapport à a , on obtient

$$\lambda'(a) + e^{-\lambda(a)} - a \lambda'(a) e^{-\lambda(a)} = 0$$

i.e

$$(1 - a e^{-\lambda(a)}) \lambda'(a) = -e^{-\lambda(a)}$$

sont :

$$(a e^{-\lambda(a)} - 1) \lambda'(a) = e^{-\lambda(a)} \quad (**)$$

→ Vérifions que $i\frac{\pi}{2}$ est une valeur propre simple.

Supposons, par l'absurde, que $\lambda'(\frac{\pi}{2}) = 0$.

Alors $e^{-i\frac{\pi}{2}} = 0$. Or

$$e^{-i\frac{\pi}{2}} = \cos(-\frac{\pi}{2}) + i \sin(-\frac{\pi}{2}) = -i \neq 0.$$

Donc $\lambda'(\frac{\pi}{2}) \neq 0$ et $i\frac{\pi}{2}$ est une valeur propre simple.

→ Ensuite, d'après (**),

$$\lambda'(a) = \frac{e^{-\lambda(a)}}{a e^{-\lambda(a)} - 1} = \frac{-\frac{\lambda(a)}{a}}{-\lambda(a) - 1}$$

↑
utilisez
l'éq. car.

d'où

$$\lambda'(a) = \frac{\lambda(a)}{a(\lambda(a) + 1)}$$

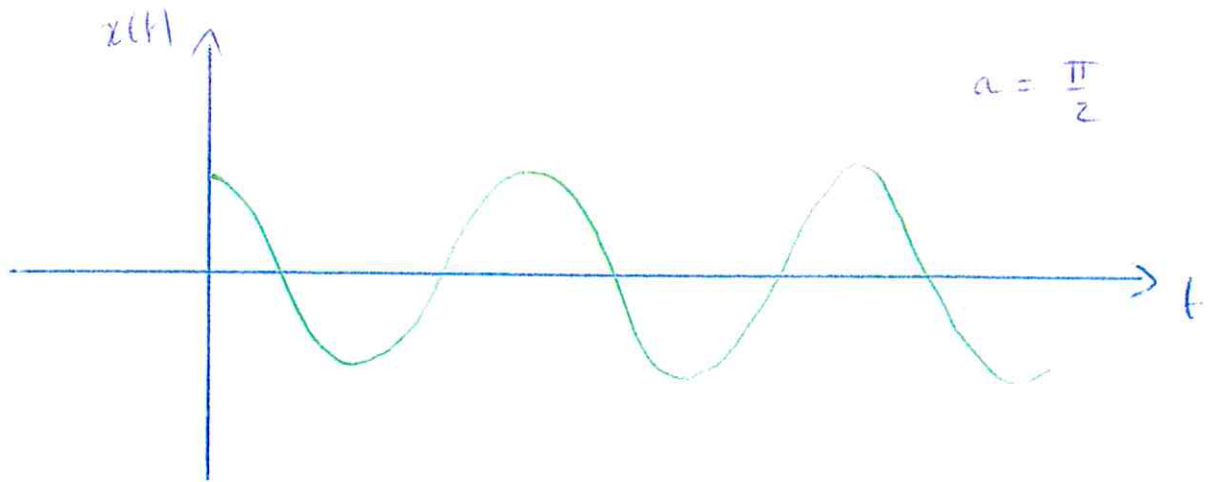
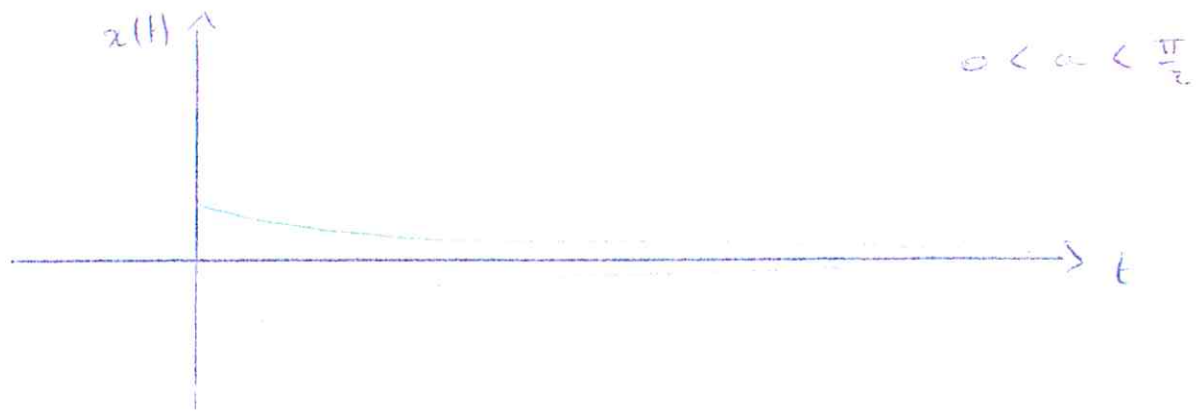
Ainsi :

$$\begin{aligned} \lambda'(\frac{\pi}{2}) &= \frac{\lambda(\frac{\pi}{2})}{\frac{\pi}{2}(\lambda(\frac{\pi}{2}) + 1)} = \frac{i\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}(i\frac{\pi}{2} + 1)} = \frac{i\frac{\pi}{2}(-i\frac{\pi}{2} + 1)}{\frac{\pi}{2}(i\frac{\pi}{2} + 1)(-i\frac{\pi}{2} + 1)} \\ &= \frac{(\frac{\pi^2}{4} + i\frac{\pi}{2})}{\frac{\pi}{2}(1 + \frac{\pi^2}{4})} = \frac{\frac{\pi}{2} + i}{\frac{\pi^2}{4} + 1} \end{aligned}$$

$$\text{d'où : } \operatorname{Re} \lambda'(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi/2}{\pi^2/4 + 1} > 0.$$

On conclut : bifurcation de Hopf lorsque $a = \frac{\pi}{2}$.

$$\dot{x}(t) = -a x(t-1) (1 - x(t)^2), \quad a > 0.$$



Remarque D'après les résultats de linéarisation de l'exemple 3, avec $a(t) = -a$, on détermine facilement que les états d'équilibre $x \equiv -1$ et $x \equiv 1$ sont instables lorsque $a > 0$.

THÉORÈME DE HAYES - RÉVISITÉ (H)

On considère l'équation à retard linéaire

$$x'(t) = -A x(t) - B x(t-\tau) \quad (EL)$$

et l'équation caractéristique associée

$$\lambda + A + B e^{-\lambda \tau} = 0$$

Théorème

- (1) Si $B \leq 0$, (EL) est asymptotiquement stable pour tout $\tau \geq 0$ si $A + B > 0$, et instable pour tout $\tau \geq 0$ si $A + B < 0$.
- (2) Si $B > 0$, (EL) est asymptotiquement stable pour tout $\tau \geq 0$ si $A > B$, et instable pour tout $\tau \geq 0$ si $A + B < 0$.
- (3) Si $B > 0$ et $B > |A|$, alors (EL) est asymptotiquement stable pour $\tau \in [0, \tau^*)$ et instable pour $\tau \geq \tau^*$, où
- $$\tau^* = \frac{1}{\sqrt{B^2 - A^2}} \arccos\left(-\frac{A}{B}\right).$$
- Lorsque $\tau = \tau^*$, il y a une bifurcation de Hopf.

Remarque L'équation de l'exemple ci-dessus se trouve sous la forme (EL) avec $A = 0$, $B = a > 0$. Les cas (1) et (2) ne s'appliquent donc pas. En revanche d'après (3) on obtient la stabilité asymptotique pour $\tau \in [0, \tau^*)$ et l'instabilité pour

$$\tau > \tau^* \text{ où } \tau^* = \frac{1}{B} \arccos(\varphi) = \frac{1}{a} \frac{\pi}{2}.$$

En fait, dans l'exemple le retard est fixé à $\tau = 1$
 on obtient donc la relation critique $a = a_c = \frac{\pi}{2}$. $\square$

Démonstration.

EXERCICES

16/10/2024

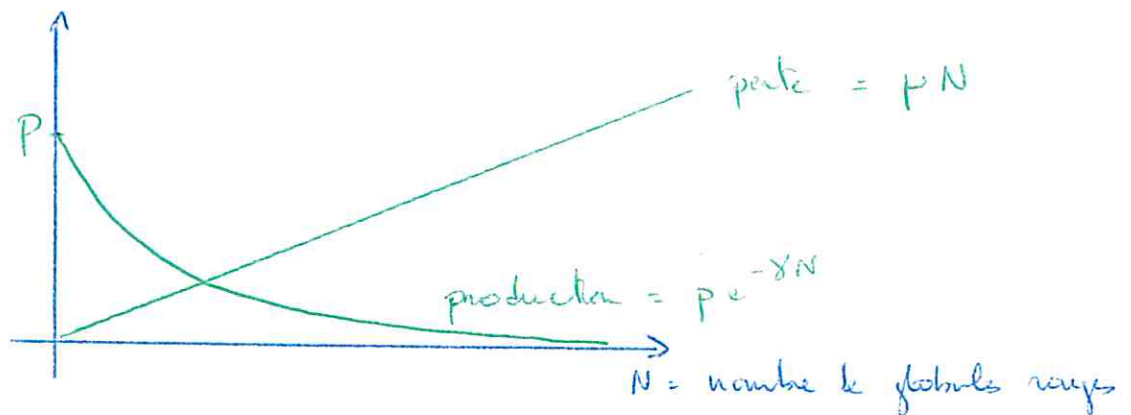
MODÈLE DE WĄŻEWSKA-CZYŻEWSKA ET LASOTA (1976)

Soit $N(t)$ le nombre de globules rouges au temps $t \geq 0$.

Soit p le taux de mort des globules rouges, et

p et γ deux paramètres tels que la production de globules rouges soit décrite par $p e^{-\gamma N}$. La

production décroit exponentiellement lorsque le nombre de globules rouges augmente.



L'équation décrivant l'évolution de $N(t)$ est alors

$$N'(t) = -pN(t) + p e^{-\gamma N(t-\tau)} \quad (WCL)$$

où $\tau \geq 0$ est le temps observé entre le déclenchement de

la production et une production effective (différenciation de cellules immatures en globules rouges, processus liés).

1) Montrer que (WCL) possède un unique état d'équilibre, noté N^* .

2) Linéariser (WCL) autour de N^* .

3) Montrer que l'équation caractéristique s'écrit
$$\lambda + \rho + \gamma \rho N^* e^{-\lambda \tau} = 0.$$

4) On suppose $N^* < \frac{1}{\gamma}$. Soit $\lambda = \alpha + i\beta$ une valeur propre. Montrer que :

$$\begin{cases} \alpha + \rho + \gamma \rho N^* e^{-\lambda \tau} \cos(\beta \tau) = 0, \\ \beta - \gamma \rho N^* e^{-\lambda \tau} \sin(\beta \tau) = 0. \end{cases}$$

4.1) Supposons par l'absurde que $\alpha = 0$. Montrer que $\alpha \neq 0$.

4.2) Supposons $\alpha > 0$. Montrer qu'on aboutit à une contradiction.

4.3) En déduire que N^* est L.A.S pour tout $\tau \geq 0$.

5) On suppose $N^* > \frac{1}{\gamma}$.

5.1) Montrer que N^* est L.A.S lorsque $\tau = 0$.

5.2) Soit $\lambda = i\beta$ une valeur propre imaginaire pure.

Montrer que nécessairement $\beta = \rho \sqrt{(\gamma N^*)^2 - 1}$.

5.3) Montrer que des valeurs propres imaginaires existent ssi

$$\tau = \tau_c = \frac{1}{\rho \sqrt{(\gamma N^*)^2 - 1}} \arccos\left(-\frac{1}{\gamma N^*}\right).$$

5.4) Montrer qu'une bifurcation de Hopf survient lorsque $\tau = \tau_c$, et conclure sur la stabilité de N^* lorsque $N^* > \frac{1}{\gamma}$.

1) $\gamma N^* = p e^{-\gamma N^*}$. On pose $f(x) = p e^{-\gamma x} - p x$.
 f est décroissante, $f(0) = p > 0 > -\infty = f(+\infty)$.
 $\Rightarrow \exists ! N^*$ tel que $f(N^*) = 0$.

2) $x'(t) = -p x(t) - \gamma p e^{-\gamma N^*} x(t-\tau)$
 $= -p x(t) - \gamma p N^* x(t-\tau)$

3) travel

4) on s'écrit parties réelles et imaginaires.

4.1) Si $\lambda = 0$ alors $\cos(\beta\tau) = -\frac{p}{\gamma p N^*} = -\frac{1}{\gamma N^*} < -1$

4.2) Si $\lambda > 0$ alors

$$\cos(\beta\tau) = -\frac{\lambda + p}{\gamma p N^*} = -\frac{\lambda}{\gamma p N^*} - \frac{1}{\gamma N^*} < -\frac{1}{\gamma N^*} < -1.$$

5.1) $\tau = 0 \Rightarrow \lambda = -p(1 + \gamma N^*) < 0$.

5.2) $\lambda = i\beta \Rightarrow \begin{cases} \cos(\beta\tau) = -\frac{p}{\gamma p N^*} \\ \sin(\beta\tau) = \frac{\beta}{\gamma p N^*} > 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \cos^2 + \sin^2 = 1 = \frac{p^2 + \beta^2}{(\gamma p N^*)^2}$ d'où

$$\beta = \sqrt{(\gamma p N^*)^2 - p^2} = p \sqrt{(\gamma N^*)^2 - 1}$$

5.3) $\cos\left(p \sqrt{(\gamma N^*)^2 - 1} \tau\right) = -\frac{p}{\gamma p N^*}$

$\Rightarrow \tau = \frac{1}{p \sqrt{(\gamma N^*)^2 - 1}} \arccos\left(-\frac{p}{\gamma p N^*}\right)$

EXERCICES

WANGERSKY - CUNNINGHAM'S MODEL : "PROIE - PRÉDATEUR"

Il s'agit d'une modification du modèle de Lotka-Volterra, incorporant un retard direct dans un modèle "proie-prédateur".

Soit $x(t)$ la densité de proies et $y(t)$ la densité de prédateurs. Les proies ont supposées avoir une croissance logistique, de paramètres R_x et a , et le taux de prédation est supposé être $b y(t)$. Les prédateurs meurent avec un taux R_y et la naissance / apparition de nouveaux prédateurs dépend de la consommation de proies. Wangersky et Cunningham (1957) ont supposé qu'il fallait qu'un temps τ s'écoule avant que la consommation de proies produise de nouveaux prédateurs. D'où le système :

$$\begin{cases} x'(t) = (R_x - a x(t)) x(t) - b y(t) x(t) \\ y'(t) = c x(t-\tau) y(t-\tau) - R_y y(t) \end{cases} \quad (WC)$$

1/ Prouver que (WC) possède 2 états d'équilibre, $(\bar{x}, \bar{y}) = (0, 0)$ et $(\bar{x}, \bar{y}) = (x^*, y^*)$, $x^* > 0$, $y^* \geq 0$ ssi $\frac{R_y}{c} \geq \frac{R_x}{a}$.

2/ Linéariser (WC) autour de $(\bar{x}, \bar{y})$ et obtenez l'éq^{te} caractéristique $(\bar{x}, \bar{y}) = (0, 0) \Rightarrow (\lambda - R_x)(\lambda + R_y) = 0$, $\lambda \in \mathbb{C}$

$$(\bar{x}, \bar{y}) = (x^*, y^*) \Rightarrow (\lambda + \alpha R_y)(\lambda + R_y) - R_y(\lambda + 2\alpha R_y - R_x)e^{-\lambda\tau} = 0, \\ \lambda \in \mathbb{C} \text{ et } \alpha = \frac{a}{c}$$

linearisation

$$\begin{cases} x'(t) = R_1 x(t) - a x^2(t) - b x(t) y(t) \\ y'(t) = -R_2 y(t) + c x(t-\tau) y(t-\tau) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x'(t) = (R_1 - 2a\bar{x} - b\bar{y}) x(t) - b\bar{x} y(t) \\ y'(t) = -R_2 y(t) + c\bar{y} x(t-\tau) + c\bar{x} y(t-\tau) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_1 - 2a\bar{x} - b\bar{y} & -b\bar{x} \\ 0 & -R_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c\bar{y} & c\bar{x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_\tau \\ y_\tau \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} \lambda - (R_1 - 2a\bar{x} - b\bar{y}) & b\bar{x} \\ -c\bar{y}e^{-\lambda\tau} & \lambda + R_2 - c\bar{x}e^{-\lambda\tau} \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow [\lambda - (R_1 - 2a\bar{x} - b\bar{y})][\lambda + R_2 - c\bar{x}e^{-\lambda\tau}] + bc\bar{x}\bar{y}e^{-\lambda\tau} = 0$$

$$\Leftrightarrow (\lambda - R_1 + 2a\bar{x} + b\bar{y})(\lambda + R_2) - c\bar{x}(\lambda - R_1 + 2a\bar{x} + b\bar{y})e^{-\lambda\tau} + bc\bar{x}\bar{y}e^{-\lambda\tau} = 0$$

$$(\bar{x}, \bar{y}) = (0, 0):$$

$$\Leftrightarrow (\lambda - R_1)(\lambda + R_2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = R_1 \quad \text{or} \quad \lambda = -R_2$$

$$(\bar{x}, \bar{y}) = (x^*, y^*):$$

~~$$\Leftrightarrow (\lambda + R_2)(\lambda + R_2) - R_2(\lambda + R_2) = 0$$~~

$$\Leftrightarrow (\lambda + a x^*)(\lambda + R_2) - c x^* (\lambda + a x^* + b y^*) e^{-\lambda\tau} = 0$$

$$\Leftrightarrow (\lambda + \frac{a}{c} R_2)(\lambda + R_2) - R_2 (\lambda + \frac{a}{c} R_2 + \frac{1}{c} (a R_2 - c R_1)) e^{-\lambda\tau} = 0$$

$$\Leftrightarrow (\lambda + \alpha R_2)(\lambda + R_2) - R_2 (\lambda + 2\alpha R_2 - R_1) e^{-\lambda\tau} = 0$$

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) [R_1 - a x(t) - b y(t)] \\ y'(t) = -R_2 y(t) + c x(t - \tau) y(t - \tau) \end{cases}$$

Etats d'équilibre $(\bar{x}, \bar{y})$

$$\begin{cases} \bar{x} [R_1 - a \bar{x} - b \bar{y}] = 0 \\ R_2 \bar{y} = c \bar{x} \bar{y} \end{cases}$$

$$(\Rightarrow) \begin{cases} \bar{x} = 0 & \text{ou} & b \bar{y} = a \bar{x} - R_1 \\ \bar{y} = 0 & \text{ou} & \bar{x} = \frac{R_2}{c} \end{cases}$$

si $\bar{x} = 0$ alors $\bar{y} = 0 \Rightarrow (\bar{x}, \bar{y}) = (0, 0)$

si $\bar{y} = 0$ alors $\begin{cases} \bar{x} = \frac{R_1}{a} \\ \bar{x} = 0 \end{cases} \Rightarrow (\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{R_1}{a}, 0 \right)$

$\bar{x} = 0 \Rightarrow (\bar{x}, \bar{y}) = (0, 0)$

si $\bar{x} \neq 0$ alors $b \bar{y} = a \bar{x} - R_1$

si $\bar{y} \neq 0$ alors $\bar{x} = \frac{R_2}{c}$ et $\bar{y} = \frac{1}{b} \left(a \frac{R_2}{c} - R_1 \right)$

$$\Rightarrow (\bar{x}, \bar{y}) = (x^*, y^*) = \left(\frac{R_2}{c}, \frac{a R_2 - c R_1}{b c} \right)$$

à condition que $a R_2 - c R_1 \geq 0$ i.e. $\frac{R_2}{c} \geq \frac{R_1}{a}$

en fait $\left(\frac{R_1}{a}, 0 \right)$ est un cas particulier quand $\frac{R_2}{c} = \frac{R_1}{a}$.

Conclusion: $(\bar{x}, \bar{y}) = (0, 0)$ et

$(\bar{x}, \bar{y}) = (x^*, y^*)$ si $\frac{R_2}{c} \geq \frac{R_1}{a}$.

Dans ce cas

$$x^* = \frac{R_2}{c} \quad \text{et} \quad y^* = \frac{1}{b c} [a R_2 - c R_1]$$

STABILITÉ GLOBALE

Dans certains cas, on peut établir la stabilité globale d'une équation à retard : soit "à la main", en utilisant des propriétés des équations, soit en utilisant une méthode de Lyapunov.

De façon analogue à la 2^{ème} méthode de Lyapunov pour les équations différentielles ordinaires, on peut définir une fonction "qui dérive le long des solutions".

Considérons l'équation à retard

$$x'(t) = f(t, x_t), \quad t \geq 0 \quad (1)$$

où $f: [0, +\infty) \times C \rightarrow \mathbb{R}^n$ est continue et $f(t, 0) = 0$,

ie $x \equiv 0$ est un état d'équilibre de l'équation (1).

Soit $V: [0, +\infty) \times C \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, et

x^φ la solution de (1) associée à la condition initiale $\varphi \in C$.

On note

$$\dot{V} = \dot{V}(t, \varphi) = \limsup_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} [V(t+h, x_{t+h}^\varphi) - V(t, \varphi)].$$

La "dérivée" de V , notée $\dot{V}$, dépend faiblement de l'équation (1) !

Remarque. $\dot{V} = \limsup_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [V(x_h^\varphi) - V(\varphi)]$ lorsque f ne dépend pas de t .

THÉORÈME

Soient $u, v, w : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ des fonctions continues et croissantes, telles que :

$$\begin{cases} u(0) = v(0) = w(0) = 0 \\ \forall s > 0, \quad u(s) > 0 \quad \text{et} \quad v(s) > 0 \end{cases}$$

Alors, si $V : [0, +\infty) \times C \rightarrow \mathbb{R}$ vérifie

$$- \quad u(|\varphi(0)|) \leq V(t, \varphi) \leq v(\|\varphi\|)$$

$$- \quad \dot{V}(t, \varphi) \leq -w(|\varphi(0)|)$$

alors $x \equiv 0$ est stable.

Si de plus :

(i) $\lim_{s \rightarrow +\infty} u(s) = +\infty$ alors les solutions de (1) sont bornées

(ii) $\forall s > 0, w(s) > 0$ alors $x \equiv 0$ est asymptotiquement stable.

PREUVE

1) On établit d'abord la stabilité.

Les fonctions u et v sont croissantes, donc $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tel que $v(\delta) < u(\varepsilon)$, et $0 < \delta < \varepsilon$.

Soit $\varphi \in B(0, \delta)$, alors

$$\dot{V}(t, x_t^\varphi) \stackrel{(\text{hyp})}{\leq} -w(|x_t^\varphi(0)|) = -w(|x^\varphi(t)|) \leq -w(0) = 0$$

$$\text{car } |x^\varphi(t)| \geq 0 \Rightarrow w(|x^\varphi(t)|) \geq w(0).$$

Ainsi $\dot{V}(t, x_t^q) \leq 0 \quad \forall t \geq 0$

donc, en intégrant entre 0 et t , on obtient.

$$\int_0^t \dot{V}(0, x_0^q) d\theta \leq 0$$

i.e

$$V(t, x_t^q) \leq V(0, x_0^q) = V(0, \varphi)$$

Comme $\varphi \in B(0, \varepsilon)$ alors $\|\varphi\| < \varepsilon$ donc

$$V(0, \varphi) \stackrel{(hyp)}{\leq} v(\|\varphi\|) < v(\varepsilon) < u(\varepsilon)$$

car v str croissante.

De plus, par hypothèse

$$V(t, x_t^q) \geq u(|x_t^q(0)|) = u(|x^q(t)|)$$

Donc :

$$u(|x^q(t)|) < u(\varepsilon)$$

et comme u str croissante : $|x^q(t)| < \varepsilon$.

Ainsi $x \equiv 0$ str stable.

2) Supposons en plus que $\lim_{s \rightarrow +\infty} u(s) = +\infty$.

Alors, $\forall \alpha > 0$, $\exists \beta > 0$ tel que $u(\beta) = \sigma(\alpha)$.

Soit $\varphi \in B(0, \alpha)$, alors $\|\varphi\| \leq \alpha$ et d'après la 1^{ère} partie de la preuve $u(|x^q(t)|) \leq u(\beta)$

[Remarque : on utilise $u(\varepsilon) = v(\delta)$ avec $\beta = \varepsilon$ et $\alpha = \delta$.]

donc $|x^q(t)| \leq \beta \quad \forall t \geq 0$ et x^q str bornée.

3) Supposons $u(s) > 0, \forall s > 0$.

Pour $\varepsilon_0 = 1$, $\exists \delta_0 < 1$ tel que $v(\delta_0) < u(1)$

(cf. preuve du point 1))

Soit $0 < \varepsilon < 1$. On veut montrer qu'il existe

$t_0 = t_0(\delta_0, \varepsilon) > 0$ tel que

$$\| \varphi \| < \delta_0 \Rightarrow \| x_t \varphi \| < \varepsilon \quad \forall t \geq t_0.$$

Soit $\varepsilon > 0$ tel que $0 < \varepsilon < \varepsilon$ et $v(\varepsilon) < u(\varepsilon)$.

Alors pour $\varphi \in C$ tel que $\| \varphi \| < \varepsilon$, on veut (stabilité) que

$$\| x_t \varphi \| < \varepsilon, \quad \forall t \geq 0.$$

Soit $\varphi \in C$ tel que $\| \varphi \| < \delta_0$. Supposons par l'absurde que $\| x_t \varphi \| \geq \varepsilon$ pour $t \in [0, T]$ où $T > 2R$.

Par définition de la fonction translation $\varphi \mapsto x_t \varphi$, on a chaque intervalle de longueur R il existe s tel que $|x^q(s)| \geq \varepsilon$.

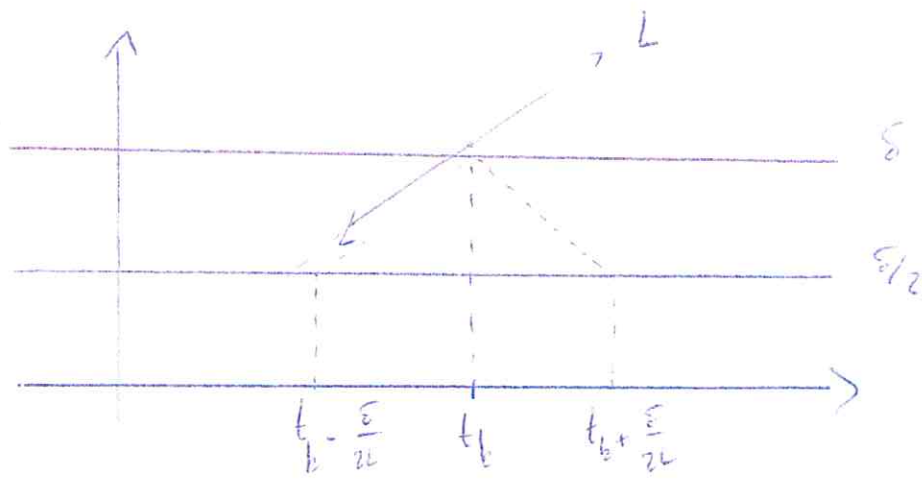
Donc il existe une suite $(t_k)_{k \in \mathbb{N}}$ telle que $|x^q(t_k)| \geq \varepsilon$,

$$\text{où} \quad (2k-1)R \leq t_k \leq 2kR, \quad k \leq \frac{T}{2R}.$$

De plus, f étant continue, elle est bornée pour $t \in [0, T]$ et $\exists L > 0$ tel que $|x^q(t)| \leq L \quad \forall t \in [0, T]$

Ainsi sur l'intervalle $\left[t_k - \frac{\varepsilon}{2L}, t_k + \frac{\varepsilon}{2L} \right]$ on a

$$|x^q(t)| > \frac{\varepsilon}{2}$$



Par hypothèse, on a donc

$$\begin{aligned} \forall t \in \left[t_k - \frac{\delta}{2L}, t_k + \frac{\delta}{2L} \right], \quad & \dot{V}(t, x_t^\epsilon) \leq -w(|x_t^\epsilon|_0), \\ & \leq -w\left(\frac{\delta}{2}\right), \\ & \leq -w\left(\frac{\delta}{2}\right), \end{aligned}$$

car w est croissante.

On a $t_{k+1} - t_k \geq R$, donc on suppose $L > \frac{\delta}{R}$ (on peut toujours) et les intervalles $\left[t_k - \frac{\delta}{2L}, t_k + \frac{\delta}{2L} \right]$ sont disjoints. Ainsi, en intégrant entre 0 et t_k , on obtient:

$$\begin{aligned} V(t_k, x_{t_k}^\epsilon) - V(0, x_0^\epsilon) &= V(t_k, x_{t_k}^\epsilon) - V(0, \varphi) \\ &\leq -w\left(\frac{\delta}{2}\right) \int_0^{t_k} dt = -w\left(\frac{\delta}{2}\right) t_k \\ &\leq -w\left(\frac{\delta}{2}\right) (2k-1) R, \\ &\leq -w\left(\frac{\delta}{2}\right) (2k-1) \frac{\delta}{L}. \end{aligned}$$

Soit $\kappa > 0$, entier, tel que :

$$\kappa \geq \frac{L}{\varepsilon} \frac{v(\varepsilon_0)}{w(\frac{\varepsilon}{2})}$$

Alors, pour k tel que $2k-1 > \kappa$, on a

$$\begin{aligned} V(t_k, x_{t_k}^q) &\leq V(0, \varphi) - w\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \frac{\varepsilon}{L} (2k-1) \\ &\leq v(\|\varphi\|) - w\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \frac{\varepsilon}{L} \kappa \\ &< v(\varepsilon_0) - w\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \frac{\varepsilon}{L} \frac{L}{\varepsilon} \frac{v(\varepsilon_0)}{w(\frac{\varepsilon}{2})} \end{aligned}$$

$\uparrow$
 car v est
 croissante et
 $\|\varphi\| < \varepsilon_0$

d'où $V(t_k, x_{t_k}^q) < 0$.

Or $V(t_k, x_{t_k}^q) \geq \alpha(|x_{t_k}^q(0)|) = \alpha(|x^q(t_k)|) > 0$.

On obtient une contradiction.

Ainsi $\|x_t^q\| < \varepsilon$ pour $t \geq t_0 = 2R(\kappa+1)$.

Comme $\varepsilon < \varepsilon$, on obtient :

$\exists t_0 > 0$, $\forall t \geq t_0$, $\|x_t^q\| < \varepsilon$.

□

Exemple

Modèle de Mackey (1978).

$$N'(t) = -[s + \beta(N(t))]N(t) + 2e^{-\gamma t} \beta(N(t-\tau))N(t, \tau)$$

où β est une fonction positive, décroissante, bornée et

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \beta(N) = 0.$$

On remarque que $N \equiv 0$ est un état d'équilibre, et c'est le seul état d'équilibre lorsque

$$(2e^{-\gamma\tau} - 1) \beta(0) < s.$$

On pose, pour $\varphi \in C^+$,

$$V(\varphi) = \varphi(0) + 2e^{-\gamma\tau} \int_{-\tau}^0 \beta(\varphi(\theta)) \varphi(\theta) d\theta.$$

Alors,

$$\begin{aligned} \dot{V}(\varphi) &= \limsup_{h \rightarrow 0} \frac{V(N_h^\varphi) - V(\varphi)}{h} \\ &= \limsup_{h \rightarrow 0} \frac{N_h^\varphi(0) + 2e^{-\gamma\tau} \int_{-\tau}^0 \beta(N_h^\varphi(\theta)) N_h^\varphi(\theta) d\theta - \varphi(0) - 2e^{-\gamma\tau} \int_{-\tau}^0 \beta(\varphi(\theta)) \varphi(\theta) d\theta}{h} \end{aligned}$$

$$= \limsup_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[N_h^\varphi(0) - N_0^\varphi(0) + 2e^{-\gamma\tau} \int_{-\tau}^0 \beta(N_h^\varphi(\theta)) N_h^\varphi(\theta) - \beta(N_0^\varphi(\theta)) N_0^\varphi(\theta) d\theta \right]$$

$$\rightarrow \limsup_{h \rightarrow 0} \frac{N_h^\varphi(0) - N_0^\varphi(0)}{h} = \limsup_{h \rightarrow 0} \frac{N^\varphi(h) - N^\varphi(0)}{h} = \dot{N}^\varphi(0) = \dot{\varphi}(0).$$

$$\rightarrow \text{On pose } f(h) = \beta(N_h^\varphi(0)) N_h^\varphi(0) - \beta(N^\varphi(h+\tau)) N^\varphi(h+\tau)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\beta(N^\psi(h+\epsilon))N^\psi(h+\epsilon) - \beta(N^\psi(0))N^\psi(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = f'(0)$$

où $f(h) = \beta(N^\psi(h+\epsilon))N^\psi(h+\epsilon)$, $\epsilon \in [-\tau, 0]$

Donc $f'(0) = \left(\frac{d}{dh} \left[\beta(N^\psi(h+\epsilon))N^\psi(h+\epsilon) \right] \frac{d}{dh} N^\psi(h+\epsilon) \right) \Big|_{h=0}$

$$= \frac{d}{dh} \left[\beta(N^\psi(0))N^\psi(0) \right] \dot{N}^\psi(0)$$

$$= \frac{d}{d\epsilon} \left[\beta(N^\psi(0))N^\psi(0) \right]$$

$$= \frac{d}{d\epsilon} \left[\beta(\varphi(0))\varphi(0) \right]$$

Donc :

$$\dot{V}(\varphi) = \dot{\varphi}(0) + 2e^{-\gamma\tau} \int_{-\tau}^0 \frac{d}{d\epsilon} \left[\beta(\varphi(0))\varphi(0) \right] d\epsilon$$

$$= \dot{\varphi}(0) + 2e^{-\gamma\tau} \left(\beta(\varphi(0))\varphi(0) - \beta(\varphi(-\tau))\varphi(-\tau) \right)$$

$$= -[\delta + \beta(\varphi(0))] \varphi(0) + 2e^{-\gamma\tau} \beta(\varphi(-\tau))\varphi(-\tau) + 2e^{-\gamma\tau} \beta(\varphi(0))\varphi(0) - 2e^{-\gamma\tau} \beta(\varphi(-\tau))\varphi(-\tau)$$

$$= -\varphi(0) \left[\delta - (2e^{-\gamma\tau} - 1) \beta(\varphi(0)) \right]$$

On a :

$$1/ \quad V(\varphi) \geq \varphi(0) = |\varphi(0)| \quad \text{car } \varphi \in C^+$$

$$\text{On pose } u(x) = x$$

$$2/ \quad V(\varphi) \leq \|\varphi\| + 2e^{-\gamma_0} \beta(0) = \|\varphi\| = v(\|\varphi\|)$$

$$3/ \quad \dot{V}(\varphi) \leq -w(|\varphi(0)|) \quad \text{où}$$

$$w(x) = x \left[\delta - (2e^{-\gamma_0} - 1) \beta(x) \right]$$

$$w(0) = 0$$

$$w(x) > 0 \quad \text{si } x > 0 \quad \text{car } \delta > (2e^{-\gamma_0} - 1) \beta(0) > (2e^{-\gamma_0} - 1) \beta(x).$$

Conclusion: Les solutions de l'équation de Rackeys sont bornées et convergent vers $x \equiv 0$ pour toute condition initiale positive.

Exemple $x'(t) = -a x(t) - b x(t-r)$, $a > 0$.

On pose $V(\varphi) = \frac{1}{2} \varphi^2(0) + \frac{a}{2} \int_{-R}^0 \varphi^2(\theta) d\theta$.

On a : $V(\varphi) \geq \frac{1}{2} \varphi^2(0) = u(\varphi(0))$ car $a > 0$.

La fonction u est positive, nulle en $x=0$, croissante, et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = +\infty$$

De plus, $V(\varphi) \leq v(\|\varphi\|)$ où

$$v(x) = \frac{1}{2} x^2 + \frac{aR}{2} x^2, \quad v \text{ est croissante, positive}$$

et nulle uniquement en $x = 0$.

Enfin :

$$\dot{V}(\varphi) = \limsup_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\frac{1}{2} x_h(0)^2 - \frac{1}{2} x_0(0)^2 + \frac{a}{2} \int_{-R}^0 (x_h(\theta)^2 - x_0(\theta)^2) d\theta \right]$$

$$= \frac{1}{2} \limsup_{h \rightarrow 0} \frac{x(h)^2 - x(0)^2}{h}$$

$$+ \frac{a}{2} \int_{-R}^0 \limsup_{h \rightarrow 0} \frac{x(h+\theta)^2 - x(\theta)^2}{h} d\theta$$

$$= \frac{1}{2} \times 2 \dot{x}(0) x(0) + \frac{a}{2} \int_{-R}^0 2 \dot{x}(\theta) x(\theta) d\theta$$

$$= \dot{\varphi}(0) \varphi(0) + \frac{a}{2} \int_{-R}^0 \frac{d}{d\theta} [x(\theta)^2] d\theta$$

$$\begin{aligned}
\text{Donc } \dot{V}(\varphi) &= \dot{\varphi}(0) \varphi(0) + \frac{a}{2} \left[x(0)^2 - x(-R)^2 \right] \\
&= \dot{\varphi}(0) \varphi(0) + \frac{a}{2} \left[\varphi(0)^2 - \varphi(-R)^2 \right] \\
&= \left[-a \varphi(0) - b \varphi(-R) \right] \varphi(0) + \frac{a}{2} \varphi(0)^2 - \frac{a}{2} \varphi(-R)^2 \\
&= -\frac{a}{2} \varphi(0)^2 - b \varphi(-R) \varphi(0) - \frac{a}{2} \varphi(-R)^2 \\
&= -\frac{a}{2} \left[\left(\varphi(-R) + \frac{b}{a} \varphi(0) \right)^2 + \frac{a^2 - b^2}{a^2} \varphi(0)^2 \right]
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\dot{V}(\varphi) \leq -\frac{a^2 - b^2}{a^2} \varphi(0) = -w(\varphi(0))$$

où $w(x) = \frac{a^2 - b^2}{a^2} x$ est tel que

$$w(0) = 0$$

$w(x) > 0$ pour $x > 0$ si $a^2 > b^2$, i.e. $a > |b|$.

Conclusion Les solutions sont bornées et convergent vers

$$\left[\begin{array}{l} x=0 \quad \text{si} \quad a > |b|. \end{array} \right.$$

THÉORÈMES D'EXISTENCE LOCALE ET D'UNICITÉ : DÉMONSTRATIONS

Soit $f: I \subset \mathbb{R}^+ \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^n$, et $\varphi \in \mathbb{C}$. On considère l'équation (problème de Cauchy)

$$(PC) \quad \begin{cases} x'(t) = f(t, x_t) & , \quad t \in I \\ x_0 = \varphi \end{cases}$$

THÉORÈME [Existence locale]

Soit $b > 0$ et $f: [-b, b] \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^n$ continue.

Alors $\forall \varphi \in \mathbb{C}$, $\exists a \in (0, b]$ tel que (PC) admet une solution sur $[-a, a]$.

Démonstration.

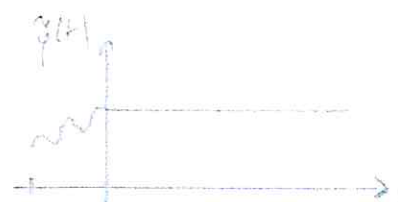
La démonstration s'appuie sur le théorème de point fixe de Schauder, qu'on rappelle :

Soit $\bar{B}$ un ensemble fermé, borné, convexe d'un espace de Banach et g une application définie sur $\bar{B}$, continue, et telle que $g(\bar{B}) \subseteq \bar{B}$ et $g(\bar{B})$ est relativement compact. Alors g admet un point fixe dans $\bar{B}$.

Soit $\varphi \in \mathbb{C}$ et le problème (PC) posé pour $t \in [0, b]$. Alors (PC) est équivalent à

$$x(t) = \begin{cases} \varphi(0) + \int_0^t f(\sigma, x_\sigma) d\sigma & , \quad t \geq 0 \\ \varphi(t) & , \quad t \in [-2, 0] \end{cases}$$

On pose $\tilde{\varphi}(t) = \begin{cases} \varphi(t) & , \quad t \in [-2, 0] \\ \varphi(0) & , \quad t \geq 0 \end{cases}$



et $y = x - \tilde{\varphi}$ Alors, $x_0 = y_0 + \tilde{\varphi}_0$, $\forall t \geq 0$ et

$$y(t) = \begin{cases} \int_0^t f(s, y_0 + \tilde{\varphi}_0) ds, & t \geq 0 \\ 0, & t \in [-R, 0) \end{cases}$$

Pour $a \in (0, b]$, on définit

$$X_a = \{ \phi \in \mathcal{C}([-R, a], \mathbb{R}^n) ; \phi(t) = 0 \text{ pour } t \in [-R, 0] \}$$

Notons que $X_a \neq \emptyset$ car $y \in X_a$.

On considère l'application $g : y \in X_a \mapsto g(y) \in X_a$ où

$$g(y)(t) = \begin{cases} \int_0^t f(s, y_0 + \tilde{\varphi}_0) ds, & t \geq 0 \\ 0, & t \in [-R, 0). \end{cases}$$

Pour énoncer l'existence d'une solution de (PC) il suffit de montrer qu'il existe $a > 0$ tel que g admette un point fixe dans X_a .

On veut appliquer le théorème de Schauder.

- 1- X_a est un espace de Banach pour la norme $\|\cdot\|_\infty$
- 2- On note $\overline{B} = \overline{B}(0, d) \cap X_a$ et on veut montrer que $g(\overline{B}) \subseteq \overline{B}$ [en fait, déterminer $a > 0$ tel que $g(\overline{B}) \subseteq \overline{B}$].

On a :

$$\overline{B} = \left\{ y \in \mathcal{C}^0([-R, a], \mathbb{R}^n) ; \forall t \in [-R, 0], y(t) = 0, \text{ et } \sup_{t \in [0, a]} \|y(t)\| \leq d \right\}$$

Comment choisir d ?

La fonction f étant continue sur $[0, b] \times C$, $\exists d > 0$ et $\exists \pi > 0$ tel que

$$(*) \quad \psi \in C, \|\psi\| \leq d \text{ et } t \in [0, b] \Rightarrow \|f(t, \psi + \tilde{\varphi}_t)\| \leq \pi.$$

Ensuite, soit $y \in \bar{B}$ et $t \in [0, a]$:

$$\begin{aligned} \|g(y)(t)\| &= \left\| \int_0^t f(s, y_0 + \tilde{\varphi}_0) ds \right\| \\ &\leq \int_0^t \|f(s, y_0 + \tilde{\varphi}_0)\| ds \end{aligned}$$

$$b_2: \quad - \sup_{t \in [-a, a]} \|y(t)\| \leq d$$

$$- y_0(s) = y(\theta + s) = 0 \quad \text{si } \theta + s \leq 0$$

$$\begin{aligned} - \text{donc } \|y_0\|_\infty &= \sup_{s \in [-a, 0]} \|y_0(s)\| = \sup_{s \in [-a, 0]} \|y(\theta + s)\| \\ &= \sup_{s \geq 0} \|y(\theta + s)\| \leq d \end{aligned}$$

d'où

$$\|g(y)(t)\| \leq \int_0^t \|f(s, y_0 + \tilde{\varphi}_0)\| ds \stackrel{d'q_2(*)}{\leq} t\pi \leq a\pi.$$

Il suffit alors de choisir a tel que $a\pi \leq d$ pour que

$$g(\bar{B}) \subseteq \bar{B}.$$

- 3 - L'application g est continue (c'est trivial, on montre

que si $y_n \rightarrow y$ dans X_a alors par le théorème de convergence dominée de Lebesgue $\alpha(n) \rightarrow \alpha(n)$ dans X_a .)

- h- Montrons que $g(\bar{B})$ est relativement compact.

On va utiliser un corollaire du théorème d'Ascoli-Arzelà.

[Ascoli-Arzelà] X et Y deux espaces compacts. Si E est une partie de $\mathcal{E}(X, Y)$ équicontinue, alors E est relativement compacte dans $\mathcal{E}(X, Y)$.

[Corollaire] Soit $\{f_\lambda, \lambda \in \Lambda\} \subset \mathcal{E}([-a, a], \mathbb{R}^n)$ une famille équicontinue telle que $\forall t \in [-a, a]$ la famille $\{f_\lambda(t), \lambda \in \Lambda\}$ est relativement compacte dans $\mathbb{R}^n$.
Alors $\{f_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ est relativement compacte dans $\mathcal{E}([-a, a], \mathbb{R}^n)$.

Pour rappel, $\{f_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ est équicontinue si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall \lambda \in \Lambda, |x - y| < \eta \Rightarrow |f_\lambda(x) - f_\lambda(y)| < \varepsilon$$

Dans notre cas, $g(y)(t) = \int_0^t f(\theta, y_\theta + \tilde{y}_\theta) d\theta$ pour $t \geq 0$

dans $g(\bar{B}) = \{g(y), y \in \bar{B}\}$. Comme $\forall t_1, t_2 \geq 0$,

$$|g(y)(t_1) - g(y)(t_2)| = \left| \int_{t_2}^{t_1} f(\theta, y_\theta + \tilde{y}_\theta) d\theta \right|$$

$$\leq \int_0^{|t_1 - t_2|} \|f(\theta, y_\theta + \tilde{y}_\theta)\| d\theta \leq n |t_1 - t_2|$$

alors la famille $\{g(y), y \in \bar{B}\}$ est équicontinue, i.e. $g(\bar{B})$ est équicontinue.

On montre ensuite que $\{g(y)(t), y \in \bar{B}\}$ est relativement compacte dans $\mathbb{R}^n$ pour $t \geq 0$ [à faire] et on applique le théorème de Schauder:

g admet un point fixe dans $\bar{B}$, donc $\exists a \in (0, b]$, $a < \frac{1}{n}$, tel qu'il existe $y \in \Lambda_a$ vérifiant $y(t) = g(y)(t) = \int_0^t f(\theta, y_\theta + \tilde{y}_\theta) d\theta, \forall t \geq 0$ [

THÉORÈME [unicité]

Soit $f: (t, \varphi) \in [0, b] \times C \rightarrow \mathbb{R}^m$ continue et localement lipschitzienne en φ , uniformément en t . Alors le problème (PC) possède une et une seule solution pour tout $\varphi \in C$.

De plus l'application $\varphi \in C \mapsto x_\varphi \in C$ est loc. lipschitzienne.

Démonstration.

Soient $\varphi, \psi \in C$, et x et y deux solutions de (PC) issues respectivement de φ et ψ . Alors

$$\begin{cases} x_0 = \varphi \\ x(t) = \varphi(0) + \int_0^t f(s, x_s) ds, \quad t \geq 0 \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} y_0 = \psi \\ y(t) = \psi(0) + \int_0^t f(s, y_s) ds, \quad t \geq 0 \end{cases}$$

Ainsi, $\forall t \geq 0$,

$$x(t) - y(t) = \varphi(0) - \psi(0) + \int_0^t f(s, x_s) - f(s, y_s) ds$$

et

$$\|x(t) - y(t)\| \leq \|\varphi(0) - \psi(0)\| + \int_0^t \|f(s, x_s) - f(s, y_s)\| ds$$

Comme f est loc. lipschitzienne en φ uniformément en t alors

$$\forall \varphi_0 \in C, \exists \delta > 0, \exists \kappa > 0, \forall \varphi, \psi \in \bar{B}(\varphi_0, \delta),$$

$$\|f(t, \varphi) - f(t, \psi)\| \leq \kappa \|\varphi - \psi\|.$$

Ainsi, comme $x_0, y_0 \in \bar{B}(\varphi_0, d)$, où $\varphi_0 \in C$, et l'application $t \mapsto x_t, t \mapsto y_t$ est continue, alors

$$\exists T > 0, \quad x_t, y_t \in \bar{B}(\varphi_0, d), \quad \text{pour } t \in [0, T]$$

Ainsi, $\forall t \in [0, T], \quad \|f(t, x_t) - f(t, y_t)\| \leq \kappa \|x_t - y_t\|$
et donc, $\forall t \in [0, T],$

$$\|x(t) - y(t)\| \leq \|\varphi(0) - \psi(0)\| + \kappa \int_0^t \|x_s - y_s\| ds.$$

On pose $u(s) = \|x_s - y_s\|_\infty, \quad s \in [0, T]$

On veut montrer que $u(s) \leq e^{\kappa s} u(0), \quad s \in [0, T].$

On a d'abord $u(0) = \|x_0 - y_0\|_\infty = \|\varphi - \psi\|_\infty$ et

par définition $u(0) = \sup_{\theta \in [0, 0]} \|\varphi(\theta) - \psi(\theta)\| \geq \|\varphi(0) - \psi(0)\|.$

De plus, $u(s) = \sup_{\theta \in [0, s]} \|x_s(\theta) - y_s(\theta)\| = \sup_{\theta \in [0, s]} \|x(s+\theta) - y(s+\theta)\|$

$$= \sup_{p \in [s, s]} \|x(p) - y(p)\|.$$

Comme T est petit, on suppose dans un premier temps $T < R$. Alors

$\forall s \in [0, T], \quad s - R \leq T - R < 0$. Ainsi

$$u(s) = \max \left(\sup_{p \in [s-R, 0]} \|x(p) - y(p)\|, \sup_{p \in [0, s]} \|x(p) - y(p)\| \right)$$

$$\text{Or } \sup_{p \in [s-R, 0]} \|x(p) - y(p)\| \leq \sup_{p \in [0, 0]} \|x(p) - y(p)\| = u(0)$$

Donc $\forall s \in [0, T], \quad u(s) = \max \left(u(0), \sup_{p \in [0, s]} \|x(p) - y(p)\| \right).$

Soit $p \in [0, s]$ et $s \in [0, T]$ Alors

$$\begin{aligned} \|x(p) - y(p)\| &\leq u(0) + K \int_0^p u(\sigma) d\sigma \\ &\leq u(0) + K \int_0^s u(\sigma) d\sigma \quad [u \geq 0 \text{ et } s \geq p] \end{aligned}$$

donc $\sup_{p \in [0, s]} \|x(p) - y(p)\| \leq u(0) + K \int_0^s u(\sigma) d\sigma$

Ainsi, $\forall s \in [0, T]$,

$$u(s) = \max \left(u(0), \sup_{p \in [0, s]} \|x(p) - y(p)\| \right) \leq u(0) + K \int_0^s u(s) ds.$$

On applique le lemme de Gronwall :

$$\forall s \in [0, T], \quad u(s) \leq u(0) e^{Ks},$$

il e

$$\forall s \in [0, T], \quad \|x_s - y_s\|_\infty \leq e^{Ks} \|\varphi - \psi\|_\infty.$$

L'application $\varphi \in C \mapsto x_t^\varphi \in C$ est donc localement lipschitzienne.

On a supposé $T < R$ mais de proche en proche on établit le résultat pour $T > 0$, $T \in [0, b]$, donc sur $[0, b]$. Ainsi,

$$\forall t \in [0, b], \quad \|x_t - y_t\|_\infty \leq e^{Kt} \|\varphi - \psi\|_\infty \leq e^{Kb} \|\varphi - \psi\|_\infty.$$

En prenant $\varphi = \psi$ on obtient $\|\varphi - \psi\|_\infty = 0$ et donc

$$\|x(t) - y(t)\| \leq \|\varphi(0) - \psi(0)\| + Kt e^{Kt} \|\varphi - \psi\|_\infty = 0$$

et on obtient l'unicité de la solution.

□

EXERCICES

(*)

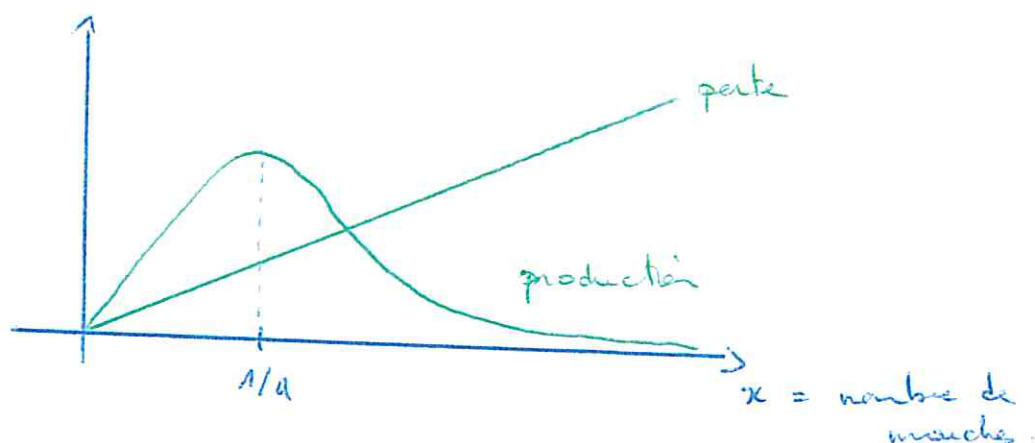
NON TRAVÉ

NICHOLSON'S BLOWFLIES : MODÈLE DE GURNEY, BLYTHE ET NISBET (1980)

Ce modèle décrit l'évolution d'une population de mouches à viande (blowflies), en se basant sur les données obtenues par Nicholson en 1954, qui montrent des oscillations périodiques (de l'ordre de 35 à 40 jours) du nombre de mouches.

On note τ le temps nécessaire à l'éclosion des œufs, qui permet de produire des adultes sexuellement matures (et donc capables de se reproduire), P est le taux de production d'œufs maximal par individu, a est l'inverse de la taille ~~de l'individu~~ à laquelle la reproduction est maximale, et δ le taux de mort des mouches. On note $x(t)$ le nombre de mouches :

$$x'(t) = -\delta x(t) + P x(t-\tau) e^{-a x(t-\tau)} \quad (NB)$$



1) Montrer que (NB) possède 1 ou 2 états d'équilibre, selon que $\delta > P$ ou $\delta \leq P$.

2) Soit $\bar{x}$ un état d'équilibre. Montrer que la linéarisation de (NB) autour de $\bar{x}$ donne

$$x'(t) = -\delta x(t) + P(1 - a\bar{x})e^{-a\bar{x}} x(t-\tau)$$

3) En déduire l'équation caractéristique

$$\lambda + \delta - P(1 - a\bar{x})e^{-a\bar{x}} e^{-\lambda\tau} = 0, \quad \lambda \in \mathbb{C}$$

4) On suppose $P > \delta$. Montrer que si $e\delta > P$ alors toutes les valeurs propres sont à parties réelles négatives dans le cas $\bar{x} = x^*$.

5) On suppose $P > e\delta$. Montrer qu'il existe $\tau_c > 0$ tel que x^* est LAS pour $\tau \in [0, \tau_c)$ et instable pour $\tau > \tau_c$, avec une bifurcation de Hopf survenant lorsque $\tau = \tau_c$.

6) On suppose s'intéresser à $\bar{x} = 0$. Montrer que l'équation caractéristique possède une unique racine réelle, λ_0 , et que si λ est une valeur propre alors $\operatorname{Re}(\lambda) < \lambda_0$, $\lambda \neq \lambda_0$. En déduire la stabilité de $\bar{x} = 0$.

$$\bar{x} = 0 \quad \text{ou} \quad \bar{x} = x^* \quad \text{ou} \quad e^{-ax^*} = \frac{\delta}{P} \quad \text{si} \quad \delta < P$$

$$\lambda + \delta - P(1 - a\bar{x})e^{-a\bar{x}}e^{-\lambda\tau} = 0.$$

$$\textcircled{1} \quad \bar{x} = 0 : \quad \lambda + \delta - Pe^{-\lambda\tau} = 0.$$

$$f(\lambda) = \lambda + \delta - Pe^{-\lambda\tau}$$

$$f'(\lambda) = 1 + P\tau e^{-\lambda\tau} > 0$$

$$f(0) = \delta - P$$

$$f(-\infty) = -\infty \quad \text{et} \quad f(+\infty) = +\infty$$

$$\left. \begin{array}{l} f'(\lambda) > 0 \\ f(0) = \delta - P \\ f(-\infty) = -\infty \quad \text{et} \quad f(+\infty) = +\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \exists! \lambda_0 \in \mathbb{R}, f(\lambda_0) = 0.$$

Si $\lambda_0 > 0$ alors instable, ie $\delta < P \Rightarrow \bar{x} = 0$ instable.

Si $\delta > P$ alors $\lambda_0 < 0$.

On montre que $\operatorname{Re}(\lambda) < \lambda_0$ si $\lambda \neq \lambda_0$.

$\Rightarrow$ L.A.S.

$$\textcircled{2} \quad \bar{x} = x^*. \quad \text{et} \quad \delta < P.$$

$$\lambda + \delta - \delta(1 - ax^*)e^{-\lambda\tau} = 0.$$

$$\lambda = p + i\omega : \quad \begin{cases} p + \delta - \delta(1 - ax^*)\cos(\omega\tau) = 0 \\ \omega + \delta(1 - ax^*)\sin(\omega\tau) = 0 \end{cases}$$

$$e > \frac{P}{\delta} > 1 \Rightarrow 1 - ax^* > 0 \quad \text{et} \quad -\delta(1 - ax^*) < 0$$

$$\frac{P}{\delta} > e \Rightarrow 1 - ax^* < 0 \quad \text{et} \quad -\delta(1 - ax^*) > 0.$$

$$x^k := \frac{1}{a} \ln \frac{p}{\delta}$$

$$e^{-\alpha x} = \frac{1}{p}$$

$$x^* = -\frac{1}{a} b \frac{c}{p}$$

$$\chi^2 = \frac{1}{a} \ln \frac{P}{\bar{c}}$$

$$\chi^2 = \frac{1}{a} \ln \frac{P}{\bar{c}}$$

$$\chi^2 = \frac{1}{a} \ln \frac{P}{\bar{c}}$$

$$\chi^2 = \frac{1}{a} \ln \frac{P}{\bar{c}}$$



$$\Rightarrow \text{da } \frac{P}{\varepsilon} < 1$$

(f) $\ln e - \ln \frac{P}{8} > 0$

(c) $\ln \frac{e\delta}{\rho} \gg \ln 1$

(c) $\frac{5}{p} \gg 1$

(F) $\frac{P}{\omega} \times e$

(f) $P \leq \epsilon \delta$.

STABILITÉ $\downarrow$ $x^* = \frac{1}{a} \ln \frac{p}{c}$, avec $p > c$.

avec $\begin{cases} A = S > 0 \\ B = S(a x^* - 1) \end{cases}$

$$\frac{P}{\sigma} > c \Rightarrow B > 0 \quad \text{Dass in cap}$$

$$\Rightarrow A > B \quad \text{ssi} \quad \frac{1}{a} < x^* < \frac{2}{a}$$

$$\frac{P}{\delta} > e \quad \text{dr} \quad x^* > \frac{2}{a} \quad (\Rightarrow) \quad B > 0 \quad \text{dr} \quad B > A > 0$$

$$x^{\frac{1}{a}} < \frac{2}{a} \quad (\Rightarrow) \quad \frac{1}{a} \ln \frac{P}{\sigma} < \frac{2}{a} \quad (\Rightarrow) \quad \ln \frac{T}{\sigma} < 2 = \ln e^2$$

$$(F) \quad \ln \frac{e^{2.5}}{P} > 0 \quad (\Rightarrow) \quad \frac{e^{2.5}}{P} > 1 \quad (\Rightarrow) \quad e^2 > \frac{P}{6}$$

