Exercice 1. *Passer des équations aux dérivées partielles aux équations différentielles à retard*
On considère le système suivant

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial p}{\partial t}(t,a_1) + \frac{\partial p}{\partial a_1}(t,a_1) &= -\gamma(a_1)p(t,a_1), && \text{pour } t>0, \text{et } a_1 \in]0,A[, && (1)\\
p(0,a_1) &= p_0(a_1), && \text{pour } a_1 \in]0,A[, && (2)\\
p(t,0) &= \beta(N(t))N(t), && \text{pour } t>0, && (3)\\
\frac{\partial n}{\partial t}(t,a_2) + \frac{\partial n}{\partial a_2}(t,a_2) &= -\delta(a_2)n(t,a_2) - \beta(n(t))n(t,a_2), && \text{pour } t>0, \text{et } a_2>0, && (4)\\
n(0,a_1) &= n_0(a_2), && \text{pour } a_2>0, && (5)\\
n(t,0) &= 2p(t,A), && \text{pour } t>0. && (6)
\end{aligned}
$$

1. Décrire par un schéma la représentation de ce problème si l'on considère p une population de cellules proliférantes et n une population de cellules au repos.
2. Que représentent les égalités (2) et (5) ?
3. Que représentent les égalités (3) et (6) ?
4. Que représentent les fonction γ, δ, β, p_0, n_0 et le paramètre A ?
5. Intégrer les équations 1 et 4 par rapport à la variable d'âge.
6. Utiliser la méthode des caractéristiques pour déterminer $p(t,A)$.
7. En déduire un nouveau système d'équations différentielles en P et N à retards, où P et N correspondent aux populations totales au temps t.
8. Que se passe-t-il si γ et δ sont indépendantes de a ?
9. En gardant les hypothèses de la question précédente, retrouver la formulation d'un problème du cours.

Exercice 2. *Étude d'une équation à retard*
On considère l'équation à retard suivante

$$x'(t) = -x(t-T), \text{ pour } t \geq 0,$$

avec $T > 0$ et pour condition initiale, $x(t) = 1$ pour $t \in [-T, 0]$.

1. Résoudre l'équation sur $[0, T]$.
2. Résoudre l'équation sur $[T, 2T]$.
3. Résoudre l'équation sur $[2T, 3T]$.
4. (bonus) En déduire une formulation générale sur $[(n-1)T, nT]$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 3. *Étude qualitative d'une équation à retard- cas linéaire*
On considère l'équation à retard suivante

$$x'(t) = -ax(t-1), \text{ pour } t \geq 0,$$

avec $a \in \mathbb{R}$.

1. Déterminer l'équilibre de ce problème.
2. On recherche les solutions sous la forme $x(t) = e^{\lambda t}$
   (a) Écrire l'équation caractéristique correspondant à cette forme de solution.
   (b) Chercher toutes les valeurs réelles possibles λ vérifiant cette équation.
   (c) Chercher toutes les valeurs complexes possibles λ vérifiant cette équation.
   (d) En déduire pour quelles valeurs de a l'équilibre sera asymptotiquement stable ou instable.
   (e) Quelle est la valeur de bifurcation a_c pour laquelle l'équilibre changera de stabilité ? Que vaudra alors l'expression de λ ?

Exercice 4. *Étude qualitative d'une équation à retard- cas non linéaire*
On considère l'équation à retard suivante

$$x'(t) = -ax(t-1)(1 - x(t-1)), \text{ pour } t \geq 0,$$

avec $a \in \mathbb{R}$.

1. Déterminer les équilibres de ce problème.
2. Linéariser autour des équilibres de ce problème.
3. Étudier la stabilité autour de chacun des équilibres.

Exercice 5. *Résolution numérique des équations à retard*

1. On considère l'équation le système d'équations à retard suivant

$$\begin{array}{rcl} y_1'(t) & = & y_1(t-1), \\ y_2'(t) & = & y_1(t-1) + y_2(t-0.2), \\ y_3'(t) & = & y_2(t). \end{array}$$

   que l'on souhaite résoudre sur $[0, 5]$ avec pour conditions initiales : $y_1(t) = 1$ sur $[-1, 0]$, $y_2(t) = 1$ sur $[-0.2, 0]$ et $y_3(t) = 1$ sur $[-0.2, 0]$.

(a) Pour appeler le solveur dde23 de matlab il suffit d'écrire :
sol = dde23(ddefile,lags,history,tspan) ;
où tspan : est l'intervalle d'intégration sur $[0, 5]$ ici, l'argument history désigne la fonction initiale.

(b) fichier pour la condition initiale : créer un fichier exo1h.m et coder la fonction suivante à l'intérieur :
function v=exo1h(t)
v=ones(3,1) ;
La plupart du temps la condition initiale est un vecteur constant.

(c) Comme dans notre système il y a deux retards, on a un vecteur de retards que l'on noter $[1, 0.2]$. Créer un fichier noté exo1f.m qui contiendra le code suivant :
function v = exo1f(t,y,Z)
ylag1 = Z(:,1) ;
ylag2 = Z(:,2) ;
v = zeros(3,1) ;
v(1) = ylag1(1) ;
v(2) = ylag1(1) + ylag2(2) ;
v(3) = y(2) ;
Noter que t est le temps, y est l'approximation de $y(t)$, et Z continent les approximations de la solution pour tous les arguments de retards. Par exemple Z(:,j) approxime y(t-Tj) où Tj est le retard donné par lag(j).

(d) Noter qu'on peut aussi simuler des équations sans retard (edo) si on définit un vecteur [] vide pour les retards. Il est alors temps de faire tourner le programme avec les commandes suivantes : »sol = dde23('exam1f',[1, 0.2],ones(3,1),[0, 5]) ;
»plot(sol.x,sol.y) ;
»title('Figure 1. Exercice.') »xlabel('temps t') ;
» ylabel('y(t)') ;

2. Exercice à faire :

(a) Simuler sur $[0, 100]$ avec comme condition initiale $y(t) = 0.5$ pour $t \leq 0$ l'équation suivante

$$y'(t) = \frac{2y(t-2)}{1 + y(t-2)^{9.65}} - y(t).$$

Tracer la solution sur le plan de phase où y(t) est en abscisses et y(t-2) est en ordonnée.
Indication : créer une fonction pour l'équation :
function v = exam2f(t,y,Z) v = $2 * Z/(1 + Z^9.65)$ - y ;
Une fois que c'est fait, appeler avec les commandes :
»sol = dde23('exam2f',2,0.5,[0, 100]) ;
»t = linspace(2,100,1000) ;
»y = ddeval(sol,t) ;
»ylag = ddeval(sol,t - 2) ;
»plot(y,ylag) ;
» title('Figure 2. Exercice.')

»xlabel('y(t)') ; »ylabel('y(t-2)') ;
»axis([0 1.5 0 1.5])

(b) Même chose avec le modèle de Mackey-Glass

$$y'(t) = \frac{0.2y(t-14)}{1+y(t-14)^{10}} - 0.1y(t),$$

dans l'intervalle de temps $[0, 300]$ et même condition initiale que précédemment.