Université Claude Bernard Lyon 1

Année universitaire 2022-2023
Semestre Automne

Master Statistique, modélisation et science des données

Niveau de master :	**Deuxième année**
Titre de l'enseignement :	**Mathématiques pour la santé**
Nom des responsables :	**L. Pujo-Menjouet**
Date de l'épreuve :	**Lundi 30 janvier 2023**
Durée de l'épreuve	**90 minutes**

Documents et cours autorisés : OUI ☒ NON ☐

<u>Préambule</u> :
Indiquez sur la copie vos **NOM et PRÉNOM**. La justification des réponses et un soin particulier apporté à la présentation sont demandés et seront pris en compte lors de la notation.

Le sujet comporte 2 exercices indépendants.

<u>Exercice 1.</u> *45 minutes - 10 points*
Le but de ce problème est de résoudre en dimension 1 sur l'intervalle $[0,L]$, $L>0$, l'équation de la chaleur suivante avec des conditions aux bords mixtes :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(t,x) &= \Delta u(t,x), \text{ pour } 0<x<L, \text{ et } t>0, \\ u(t,0) &= 0, \text{ pour } t>0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(t,L) &= 0, \text{ pour } t>0, \\ u(0,x) &= f(x), \text{ pour } 0<x<L, \end{cases}$$

où f est une fonction quelconque à valeurs dans $\mathbb{R}$ “suffisamment régulière”.

1. Préciser quels sont les types de condition en $x = 0$ et en $x = L$.
2. Déterminer, en détaillant les calculs, l'expression des fonctions propres du Laplacien pour ces conditions aux bords mixtes.
3. En déduire l'expression des valeurs propres associées à ces fonctions propres.
4. Résoudre le problème dans le cas où la fonction f est une fonction propre trouvée dans la première question.
5. Que signifie mathématiquement le terme "suffisamment régulière" pour f?
6. On considère ici $L = \pi\backslash 2$. Résoudre le problème pour la fonction f définie pour tout $x \in]0, L[$ par
$$f(x) = 17\sin(9x) + 253\sin(19x).$$
7. À partir de la solution de la question précédente, calculer $\lim_{t\to+\infty} u(t,x)$.

<u>Exercice 2.</u> *45 minutes - 10 points*
Le but de l'exercice est d'étudier le système suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} &= -k_1 u(t,x) + k_2 u^2(t,x)v(t,x) + d_u \Delta u(t,x), \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} &= k_3 - k_2 u^2(t,x)v(t,x) + d_v \Delta v(t,x). \end{cases}$$

où k_1, k_2, k_3, d_u et d_v sont des coefficients strictement positifs.

1. Montrer que la réaction de ce système admet un équilibre non nul, qu'on notera (u_0, v_0) et qu'on calculera en fonction de k_1, k_2 et k_3.
2. Donner la condition sur k_1, k_2 et k_3 pour que la réaction de ce système vérifie la règle des signes de Turing en (u_0, v_0). Préciser alors quelle variable correspondrait à l'inhibiteur et laquelle à l'activateur. Justifier
3. On considère le cas : $k_1 = k_2 = 1$ et $k_3 = 2$.
   (a) Calculer la trace et le déterminant de J, la Jacobienne de la réaction en (u_0, v_0).
   (b) En déduire la stabilité linéaire de l'équilibre homogène en l'absence de diffusion ($d_u = d_v = 0$).
   (c) On se place maintenant sur le domaine spatial $[0, \pi]$, avec des conditions de Neumann homogènes. On note λ_n, $n \in \mathbb{N}$, les valeurs propres du Laplacien.
      i. On suppose que $d_u = 1/10$ et que $d_v = 2$.
      Etudier la stabilité de l'équilibre homogène, autrement dit, montrer que le point d'équilibre est stable ou instable.
      ii. On suppose maintenant que $d_v = 24/10$, les autres paramètres restant les mêmes que dans les questions précédentes.
      Montrer qu'alors l'équilibre homogène est instable par rapport aux perturbations d'une certaine forme. La déterminer et la dessiner avec soin.