Université Claude Bernard Lyon 1 — Mathématiques Post-Paces

Semestre d'automne 2020-2021

Examen final (1h30) en distanciel

Jeudi 12 décembre 2020

Préambule :
Indiquez sur la copie vos **NOM et PRÉNOM**. La justification des réponses et un soin particulier apporté à la présentation sont demandés et seront pris en compte lors de la notation.

Le sujet comporte 3 exercices indépendants.

Exercice 1. *25 minutes - 6 points*
Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que $1-e^{i\theta} = e^{i\frac{\theta}{2}}(e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}})$.
2. Rappeler les formules d'Euler pour les nombres complexes.
3. Déduire des questions 2.(a) et (b) que $1-e^{i\theta} = -2i\sin(\frac{\theta}{2})e^{i\frac{\theta}{2}}$.
4. **Bonus :** De façon analogue montrer que $1+e^{i\theta} = 2\cos(\frac{\theta}{2})e^{i\frac{\theta}{2}}$.
5. Déduire des questions 3. et 4. que si $\theta \neq (2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ alors $\dfrac{1-e^{i\theta}}{1+e^{i\theta}} = -i\tan(\dfrac{\theta}{2})$. Justifier pourquoi l'on doit utiliser cette restriction sur θ ?
6. On suppose maintenant que $\theta = (2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Justifier le fait que $e^{i\theta} = -1$. Montrer que l'équation $\dfrac{i-z}{i+z} = -1$ ne possède pas de solution dans $\mathbb{C}$.
7. **Bonus :** supposons que $\theta \in \mathbb{R}$ avec $\theta \neq (2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ et $z \in \mathbb{C}$ avec $z \neq -i$. En utilisant la question (e), résoudre pour $z \in \mathbb{C}$, l'équation $\dfrac{i-z}{i+z} = e^{i\theta}$.

Exercice 2. *40 minutes - 10 points*

1. On considère l'application g définie pour tout $x \in \mathscr{D}_g = \mathbb{R}$ par
$$g(x) = e^x(x-1) + x^2.$$
   (a) Calculer la dérivée g' de g sur $\mathscr{D}_g$.
   (b) Déterminer les limites de g quand x tend vers $+\infty$ et $-\infty$.
   (c) Étudier le signe de $g'(x)$ sur $\mathscr{D}_g$ et dresser le tableau de variations de g sur $\mathscr{D}_g$.
   (d) Montrer que l'équation l'équation $g(x) = 0$ admet a comme unique solution sur $[0, +\infty[$.

(e) Montrer que a se situe dans l'intervalle $I = [1/2; 1]$.

2. On considère maintenant l'application f définie pour tout $x \in \mathscr{D}_f = [0, +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{e^x}{e^x + x}.$$

(a) Montrer que les équations $f(x) = x$ et $g(x) = 0$ sont équivalentes sur $[0, +\infty[$.

(b) En déduire que l'équation $f(x) = x$ admet a comme unique solution sur $[0, +\infty[$.

(c) Calculer f' sur $\mathscr{D}_f$ et en déduire le sens de variation de f. Calculer la limite de f en $+\infty$. Dresser le tableau de variations de f.

3. On considère désormais la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par

$$\begin{cases} u_1 & = & 1/2, \\ u_{n+1} & = & f(u_{n-1}), \text{ pour tout } n \geq 2. \end{cases}$$

(a) Montrer que $f(x) \in I = [1/2; 1]$ pour tout $x \in I$.

(b) En déduire que $u_n \in I$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

(c) Montrer que $|f'(x)| \leq 1/2$ pour tout $x \in I$.

(d) En appliquant le théorème des accroissements finis, montrer que

$$|u_n - a| \leq \frac{|u_{n-1} - a|}{2}, \text{ pour tout } n \geq 2.$$

(e) En déduire, par un raisonnement par récurrence que $|u_n - a| \leq (1/2)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

(f) En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers a.

Exercice 3. *25 minutes - 6 points*

Soit x un nombre réel. On considère l'intégrale suivante

$$\int_1^x e^t (t-1) dt.$$

1. Justifier que cette intégrale est bien définie.
2. À l'aide d'une intégration par parties, calculer cette intégrale.
3. Soit g une application dérivable sur $\mathbb{R}$. On pose

$$f(x) = g(x) e^{-x}.$$

(a) Montrer que l'application f est solution de

$$(\mathscr{E}) \quad y'(x) + y(x) = x - 1,$$

si et seulement si pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = e^x (x-1)$.

(b) À l'aide des questions précédentes déterminer toutes les application g vérifiant pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = e^x (x-1)$.

(c) Déduire de la question précédente, les solutions de $(\mathscr{E})$.

(d) Déterminer la solution de $(\mathscr{E})$ telle que $y(1) = 0$.