Université Claude Bernard Lyon 1
43, boulevard du 11 novembre 1918
69622 Villeurbanne cedex, France

Licence Sciences & Technologies
Spécialité : Mathématiques
UE : bio-mathématiques et modélisation

Contrôle Final Ecrit
7 avril 2020

Avant propos.

La durée de cet examen à distance est de 1h30. **Environ 15 minutes après l'épreuve seront laissées à disposition pour scanner et téléverser votre copie sur Tomuss ou me l'envoyer par e-mail. Le nom du fichier sera votre numéro d'étudiant.** La répartition en durée de chacun des exercices n'est qu'à titre indicatif. La justification des réponses et un soin particulier de la présentation seront demandés et particulièrement pris en compte lors de la notation.

Exercice 1 (30 minutes) (8 points)

Le but de ce problème est de résoudre en dimension 1 sur l'intervalle $[0, L]$, $L > 0$, l'équation de la chaleur suivante avec des conditions aux bords mixtes :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(t,x) &= \Delta_x u(t,x), \text{ pour } 0 < x < L, \text{ et } t > 0, \\ u(t,0) &= 0, \text{ pour } t > 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(t,L) &= 0, \text{ pour } t > 0, \\ u(0,x) &= f(x), \text{ pour } 0 < x < L, \end{cases}$$

où f est une fonction quelconque à valeurs dans $\mathbb{R}$ "suffisamment régulière".

1. Préciser quels sont les types de conditions en $x = 0$ et en $x = L$.
2. Donner en détaillant les calculs, l'expression des fonctions propres du Laplacien pour ces conditions aux bords mixtes.
3. En déduire l'expression des valeurs propres associées à ces fonctions propres.
4. Résoudre le problème dans le cas où la fonction f est une fonction propre trouvée dans la première question.
5. Que signifie mathématiquement le terme "suffisamment régulière" pour f ?
6. On considère ici $L = \pi\backslash 2$. Résoudre le problème pour la fonction f définie pour tout $x \in]0, L[$ par
$$f(x) = 17\sin(9x) + 253\sin(19x).$$
7. À partir de la solution de la question précédente, calculer $\lim\limits_{t \mapsto +\infty} u(t, x)$.

Exercice 2 (60 min) (12 points)

Le but de l'exercice est d'étudier le système suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} &= k_1 - k_2 u(t,x) + u^2(t,x)v(t,x) + d_u \Delta_x u(t,x), \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} &= k_3 u + k_4 - u^2(t,x)v(t,x) + d_v \Delta_x v(t,x). \end{cases}$$

où d_u et d_v sont des coefficients STRICTEMENT POSITIFS et les autres paramètres seront donnés dans la suite.

Première partie (30 min) (6 points)

On suppose dans cette partie que $k_1 = a$, $k_2 = b+1$, $k_3 = b$, $k_4 = 0$, $d_u = 1$ et $d_v = d > 0$ et a, b strictement positifs.

1. Définir un équilibre homogène de la réaction de ce système et donner les conditions requises pour que cet équilibre soit stable.
2. Montrer que la réaction de ce système admet un équilibre non nul noté (u_0, v_0) et que l'on calculera en fonction de a et b.
3. Calculer la matrice jacobienne J de la partie réaction du système au point (u, v) puis en fonction de (u_0, v_0).
4. Donner la condition sur a et b pour que la réaction de ce système vérifie la règle des signes de Turing en (u_0, v_0). Préciser alors quelle variable correspondrait à l'inhibiteur et laquelle à l'activateur. Justifier.
   Cette règle des signes est-elle une condition nécessaire, suffisante, les deux ou ni l'une ni l'autre ? Justifier.
5. Donner une condition sur a et b pour avoir la stabilité linéaire du système en l'absence de diffusion ($d_u = d_v = 0$).

Deuxième partie (30 min) (6 points)

On suppose dans cette partie que $k_1 = 0$, $k_2 = 1$ $k_3 = 0$ et $k_4 = 2$.

1. Calculer J, la Jacobienne de la réaction en (u_0, v_0).
2. En déduire la stabilité linéaire de l'équilibre homogène en l'absence de diffusion ($d_u = d_v = 0$).
3. On se place maintenant sur le domaine spatial $[0, \pi]$, avec des conditions de Neumann homogènes. On note λ_n, $n \in \mathbb{N}$, les valeurs propres du Laplacien pour cette géométrie.
   (a) Rappeler (sans la redémontrer) l'expression des fonctions propres de l'opérateur de diffusion ainsi que les valeurs propres associées sous les conditions aux bords de Neumann homogènes pour $x \in [0, L]$ où $L = \pi$, puis $L = 3\pi$.
   (b) On suppose que $d_u = 1/10$ et que $d_v = 2$.
   Etudier la stabilité de l'équilibre homogène, autrement dit, montrer que le point d'équilibre est stable ou instable.

(c) On suppose maintenant que $d_v = 24/10$, les autres paramètres restant les mêmes que dans les questions précédentes de cette partie.
Montrer qu'alors l'équilibre homogène est instable par rapport aux perturbations d'une certaine forme. La déterminer et la dessiner avec soin.

(d) Que faudrait-il changer pour retomber sur un système dont le point d'équilibre est stable (sans aucune émergence de forme) ?