Université Claude Bernard Lyon 1 — BISM
Semestre de printemps 2020-2021 — Biomathématiques et modélisation

Examen final (1h00)

Jeudi 29 mars 2021

Préambule :
Indiquez sur la copie vos **NOM et PRÉNOM**. La justification des réponses et un soin particulier apporté à la présentation sont demandés et seront pris en compte lors de la notation.

Exercice 1.

Le but de l'exercice est d'étudier le système suivant pour $t \geq 0$ et $x \in [0,L]$, $L > 0$:

$$(\mathscr{S}) \left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{\partial u(t,x)}{\partial t} & = & u^2(t,x)v(t,x) - u(t,x) + d_u \Delta_x u(t,x), \\ \dfrac{\partial v(t,x)}{\partial t} & = & 2 - u^2(t,x)v(t,x) + d_v \Delta_x v(t,x). \end{array} \right.$$

où d_u et d_v sont des coefficients STRICTEMENT POSITIFS.

1. Quelle est la partie réaction de ce système ?
2. Montrer que la réaction de ($\mathscr{S}$) admet des équilibres homogènes (u_0, v_0).
3. Calculer la matrice jacobienne J de la partie réaction de ($\mathscr{S}$) au point (u,v) puis en fonction de (u_0, v_0).
4. Rappeler la règle des signes de Turing.
5. Est-ce que la réaction de ($\mathscr{S}$) vérifie la règle des signes de Turing en (u_0, v_0). Préciser alors quelle variable correspondrait à l'inhibiteur et laquelle à l'activateur. Justifier.

   À partir de maintenant on ne considèrera que les équilibres homogènes pour lesquels la règle des signes de Turing est satisfaite.
6. En déduire la stabilité linéaire des équilibres homogènes en l'absence de diffusion ($d_u = d_v = 0$).
7. On se place maintenant sur le domaine spatial $[0, \pi]$, avec des conditions de Neumann homogènes. On note λ_n, $n \in \mathbb{N}$, les valeurs propres du Laplacien pour cette géométrie.
   (a) On suppose que $d_u = 1/10$ et que $d_v = 2$.
   Étudier la stabilité des équilibres homogènes. A-t-on l'apparition de structure de Turing ?

(b) On suppose maintenant que $d_v = 24/10$.
Est-il possible qu'un équilibre homogène soit instable par rapport à la fréquence d'une perturbation d'une certaine forme. Si oui, la déterminer et la dessiner avec soin (dessin en 3 dimension).

(c) Que faudrait-il changer pour retomber sur un système dont le point d'équilibre est stable (sans aucune émergence de forme) ou inversement pour qu'il fasse apparaître une structure de Turing ?

(d) (BONUS) Calculer la valeur minimale de d_v pour obtenir une structure de Turing quand le domaine est $[0, \pi]$.

(e) Que se passerait-il si les conditions aux bords étaient Dirichlet homogène ?