Université Claude Bernard, Lyon 1
43, boulevard du 11 novembre 1918
69622 Villeurbanne cedex, France

Biomathématiques et modélisation
MIV
UE :EDP et émergence de structures

Contrôle Terminal Ecrit
3 juin 2014

Avant propos.

La durée de l'examen est de 1h30. Aucun document et aucune calculatrice ne sont autorisés durant l'épreuve. L'usage des téléphones portables est prohibé. La répartition en durée de chacun des exercices n'est qu'à titre indicatif. La justification des réponses et un soin particulier de la présentation seront demandés et pris en compte lors de la notation.

Questions de cours (20 minutes) (4 points)

1. (2 points) Enoncer les définitions des conditions aux bords de Dirichlet et Neumann homogènes. Donner une interprétation de ces conditions ainsi que le comportement des solutions de l'équation de la chaleur quand t tend vers l'infini pour chacune de ces conditions.
2. (2 points) Donner l'expression des fonctions propres de l'opérateur de diffusion ainsi que les valeurs propres associées sous les conditions de bord de Dirichlet homogènes pour $x \in [0, L]$ où $L > 0$. Détailler les calculs en considérant tous les cas (suivant le signe des valeurs propres).

Exercice 1 (30 minutes) (9 points)

Le but de l'exercice est d'étudier le système suivant :

$$(S_1) \begin{cases} \dfrac{\partial u(t,x)}{\partial t} & = & \dfrac{u^2(t,x)}{v(t,x)} - u(t,x) + d_u \Delta u(t,x), \\ \dfrac{\partial v(t,x)}{\partial t} & = & u^2(t,x) - 2v(t,x) + d_v \Delta v(t,x). \end{cases}$$

où d_u et d_v sont des coefficients STRICTEMENT POSITIFS.

1. Montrer que la réaction de ce système admet des équilibres homogènes (u_0, v_0).
2. Calculer la matrice jacobienne J de la partie réaction du système au point (u, v) puis en fonction de (u_0, v_0).
3. Est-ce que la réaction de ce système vérifie la règle des signes de Turing en (u_0, v_0) ? Préciser alors quelle variable correspondrait à l'inhibiteur et laquelle à l'activateur. Justifier.
4. En déduire la stabilité linéaire des équilibres homogènes en l'absence de diffusion ($d_u = d_v = 0$).
5. On se place maintenant sur le domaine spatial $[0, L]$, $L > 0$ avec des conditions de bords de Dirichlet homogènes. On note λ_n, $n \in \mathbb{N}$, les valeurs propres du Laplacien pour cette géométrie. On suppose que $d_u = 1/10$.

(a) On suppose $d_v = 1/10$. Etudier la stabilité des équilibres homogènes en fonction de L.
(b) On suppose $d_v = 2/10$. Etudier la stabilité des équilibres homogènes en fonction de L.
(c) On suppose $d_v = 12/10$. Etudier la stabilité des équilibres homogènes en fonction de L.
(d) Donner la valeur de L minimale pour laquelle un équilibre homogène soit instable par rapports aux perturbations contenant une fonction propre de fréquence à définir pour chacun des cas précédents.
(e) Application avec $L = \pi$: répondre aux 4 précédentes questions dans ce cas.
(f) (BONUS (+2 points) Refaire les mêmes question avec $L = 2\pi$, puis $L = \pi/4$.

Exercice 2 (40 minutes) (10 points)

Considérons le système de deux équations de réaction-diffusion général suivant

$$(S_2) \left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{\partial u(t,x)}{\partial t} & = & f(u(t,x), v(t,x)) + d_u \Delta u(t,x), \\ \dfrac{\partial v(t,x)}{\partial t} & = & g(u(t,x), v(t,x)) + d_v \Delta v(t,x), \end{array} \right.$$

avec conditions initiale donnée (mais non précisée ici), et des conditions aux bords données (non précisées ici). On suppose u, et v définies de $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, f, et g définies de $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, et les coefficients d_u et d_v positifs ou nuls.
On suppose que ce système possède au-moins un équilibre homogène de la réaction que l'on note (u_0, v_0).

1. On considère les coefficients de diffusion d_u et d_v nuls.
   (a) Ecrire la matrice jacobienne J de la réaction au point d'équilibre (u_0, v_0).
   On notera désormais les coefficients de cette matrice jacobienne :
   $$J = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$
   (b) Donner les conditions nécessaires et suffisantes sur la trace et le déterminant de J pour que (u_0, v_0) soit un équilibre localement asymptotiquement stable.
   (c) Exprimer ces conditions en fonctions de a, b, c et d.
2. On suppose désormais que d_u et d_v sont > 0. Et on rappelle que les valeurs propres λ_n associées aux fonctions propres ω_n du laplacien avec $n \in \mathbb{N}$ ou $\mathbb{N}^*$ sont négatives ou nulles.
   (a) Déterminer les conditions nécessaires et suffisantes sur la trace et le déterminant de $J + \lambda_n D$ pour que (u_0, v_0) soit un équilibre localement asymptotiquement stable, avec
   $$D = \begin{pmatrix} d_u & 0 \\ 0 & d_v \end{pmatrix}.$$
   (b) Montrer qu'avec la condition trouvée dans la question 1.c. nous avons la trace de $J + \lambda_n D$ toujours strictement négative pour tout n.
   (c) Expliciter le déterminant de $J + \lambda_n D$ en fonction d'un polynôme de degré 2 en λ_n.

(d) Calculer la valeur de λ_n que l'on notera $\tilde{\lambda}_n$ où se polynôme atteint son minimum. Calculer alors la valeur du déterminant de $J + \tilde{\lambda}_n D$.

(e) Quelle condition doit-on imposer au déterminant de $J + \tilde{\lambda}_n D$ pour avoir une déstabilisation de l'équilibre homogène (u_0, v_0) par rapports aux perturbations ?

(f) Montrer que les conditions imposées dans les questions 1.c. et 2.e. reviennent à écrire les 3 inégalités suivantes :

$$\begin{array}{lrcl} i. & a+d & < & 0, \\ ii. & ad-bc & > & 0, \\ iii. & (dd_u + ad_v) & > & 2\sqrt{d_u d_v (ad-bc)}. \end{array}$$

(g) On voit que la condition $i.$ impose que soit a soit d sont < 0 (ou les deux). Supposons $d < 0$. Qu'impose la condition $iii.$ sur le signe de a ?

(h) Qu'impose alors la condition $ii.$ sur le signe de b et c ? En déduire le résultat de la règle des signes de Turing que l'on rappellera ici.

(i) BONUS (+2 points) : répondre aux questions 2.g. et 2.h avec cette fois-ci $a < 0$ en inversant les rôles de a et d.