**Université Claude Bernard Lyon 1**
**43, boulevard du 11 novembre 1918**
**69622 Villeurbanne cedex, France**

Licence Sciences & Technologies
Spécialité : Mathématiques
UE :EDP et émergence de structures

Contrôle Final Ecrit
2 juin 2015

## Avant propos.

La durée de l'examen est de 1h30. Aucun document et aucune calculatrice ne sont autorisés durant l'épreuve. L'usage des téléphones est prohibé. La répartition en durée de chacun des exercices n'est qu'à titre indicatif. La justification des réponses et un soin particulier de la présentation seront demandés et pris en compte lors de la notation.

## Questions de cours (30 minutes) (6 points)

1. (2 points) Donner la forme générale d'un système de deux équations de réaction-diffusion sous forme "classique" et sous forme vectorielle.
2. (2 points) Définir un équilibre homogène de la réaction de ce système et donner les conditions requises pour que cet équilibre soit stable.
3. (2 points) Enoncer la règle des signes de Turing et en donner une interprétation biologique ou chimique.

## Exercice 1 (60 minutes) ( 14 points)

Le but de l'exercice est d'étudier le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{\partial u}{\partial t} & = & k_1 - k_2 u(t,x) + u^2(t,x)v(t,x) + d_u \Delta_x u(t,x), \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} & = & k_3 u + k_4 - u^2(t,x)v(t,x) + d_v \Delta_x v(t,x). \end{array} \right.$$

où $d_u$ et $d_v$ sont des coefficients STRICTEMENT POSITIFS et les autres paramètres seront donnés dans la suite de l'exercice.

### Première partie (30 min) (7 points)

On suppose dans cette partie que $k_1 = a$, $k_2 = b + 1$, $k_3 = b$, $k_4 = 0$, $d_u = 1$ et $d_v = d > 0$ et $a$, $b$ strictement positifs.

1. Montrer que la réaction de ce système admet un équilibre non nul noté $(u_0, v_0)$ et que l'on calculera en fonction de $a$ et $b$.

2. Calculer la matrice jacobienne $J$ de la partie réaction du système au point $(u, v)$ (c'est à dire en considérant qu'il n'y a pas de diffusion) puis en fonction de $(u_0, v_0)$.
3. Donner la condition sur $a$ et $b$ pour que la réaction de ce système vérifie la règle des signes de Turing en $(u_0, v_0)$. Préciser alors quelle variable correspondrait à l'inhibiteur et laquelle à l'activateur. Justifier
4. Donner une condition sur $a$ et $b$ pour avoir la stabilité linéaire asymptotique du système en l'absence de diffusion ($d_u = d_v = 0$).

**Deuxième partie (30 min) (7 points)**

On suppose dans cette partie que $k_1 = 0$, $k_2 = 1$ $k_3 = 0$ et $k_4 = 2$.

1. Calculer $J$, la Jacobienne de la réaction en $(u_0, v_0)$.
2. En déduire la stabilité linéaire de l'équilibre homogène en l'absence de diffusion ($d_u = d_v = 0$).
3. On se place maintenant sur le domaine spatial $[0, \pi]$, avec des conditions de Neumann homogènes. On note $\lambda_n$, $n \in \mathbb{N}$, les valeurs propres du Laplacien pour cette géométrie.
   (a) Donner les formes explicites des fonctions propres du laplacien et de leur valeur propre associées pour cette condition aux bords sur $[0, \pi]$.
   (b) On suppose que $d_u = 1/10$ et que $d_v = 2$.
   Etudier la stabilité de l'équilibre homogène, autrement dit, montrer que le point d'équilibre est stable ou instable.
   (c) On suppose maintenant que $d_v = 24/10$, les autres paramètres restant les mêmes que dans les questions précédentes de cette partie.
   Montrer qu'alors l'équilibre homogène est instable par rapport aux perturbations d'une certaine forme. La déterminer et la dessiner avec soin.
   (d) (BONUS (+1 point) Que faudrait-il changer pour retomber sur un système dont le point d'équilibre est stable (sans aucune émergence de forme) ?