Université Claude Bernard Lyon 1
43, boulevard du 11 novembre 1918
69622 Villeurbanne cedex, France

Licence Sciences & Technologies
Spécialité : Mathématiques
UE :EDP et émergence de structures

Contrôle Final Ecrit
1er mars 2016

Avant propos.

La durée de l'examen est de 1h30. Aucun document et aucune calculatrice ne sont autorisés durant l'épreuve. L'usage des téléphones est prohibé. La répartition en durée de chacun des exercices n'est qu'à titre indicatif. La justification des réponses et un soin particulier de la présentation seront demandés et pris en compte lors de la notation.

Questions de cours (10 minutes) (5 points)

1. (2 points) Donner la forme générale d'un système de deux équations de réaction-diffusion sous forme "classique" et sous forme vectorielle.
2. (3 points) Donner l'expression des fonctions propres de l'opérateur de diffusion ainsi que les valeurs propres associées sous les conditions de bord de Neumann homogènes pour $x \in [0, L]$ où $L > 0$, $x \in [0, \pi]$ et $x \in [0, 2\pi]$.

Exercice 1 (40 minutes) (8 points)

Le but de ce problème est de résoudre en dimension 1 sur l'intervalle $[0, 1]$, l'équation de la chaleur suivante avec des conditions aux bords mixtes :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(t,x) &=& \Delta_x u(t,x), \text{ pour } 0 < x < 1, \quad \text{et} \quad t > 0, \\ u(t,0) &=& 0, \text{ pour } t > 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(t,1) &=& 0, \text{ pour } t > 0, \\ u(0,x) &=& f(x), \text{ pour } 0 < x < 1, \end{cases}$$

où f est une fonction quelconque à valeurs dans $\mathbb{R}$ "suffisamment régulière".

1. Donner en détaillant les calculs, l'expression des fonctions propres du Laplacien pour ces conditions aux bords mixtes.
2. En déduire l'expression des valeurs propres associées à ces fonctions propres.
3. Résoudre le problème dans le cas où la fonction f est une fonction propre trouvée dans la première question.

4. Que signifie mathématiquement le terme "suffisamment régulière" pour f ?
5. Résoudre le problème pour la fonction f définie pour tout $x \in]0,1[$ par

$$f(x) = \sin(\frac{5\pi}{2}x) + 2\sin(\frac{11\pi}{2}x).$$

6. A partir de la solution de la question précédente, calculer $\lim_{t \mapsto +\infty} u(t,x)$.

Exercice 2 (40 minutes) (7 points)

Le but de l'exercice est d'étudier le système suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} & = & -k_1 u(t,x) + k_2 u^2(t,x)v(t,x) + d_u \Delta u(t,x), \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} & = & k_3 - k_2 u^2(t,x)v(t,x) + d_v \Delta v(t,x). \end{cases}$$

où k_1, k_2, k_3, d_u et d_v sont des coefficients STRICTEMENT POSITIFS.

1. Montrer que la réaction de ce système admet un équilibre non nul, qu'on notera (u_0, v_0) et qu'on calculera en fonction de k_1, k_2 et k_3.
2. Donner la condition sur k_1, k_2 et k_3 pour que la réaction de ce système vérifie la règle des signes de Turing en (u_0, v_0). Préciser alors quelle variable correspondrait à l'inhibiteur et laquelle à l'activateur. Justifier
3. On considère le cas : $k_1 = k_2 = 1$ et $k_3 = 2$.
   (a) Calculer la trace et le déterminant de J, la Jacobienne de la réaction en (u_0, v_0).
   (b) En déduire la stabilité linéaire de l'équilibre homogène en l'absence de diffusion ($d_u = d_v = 0$).
   (c) On se place maintenant sur le domaine spatial $[0, \pi]$, avec des conditions de Neumann homogènes. On note λ_n, $n \in \mathbb{N}$, les valeurs propres du Laplacien.
      i. On suppose que $d_u = 1/10$ et que $d_v = 2$.
      Etudier la stabilité de l'équilibre homogène, autrement dit, montrer que le point d'équilibre est stable ou instable.
      ii. On suppose maintenant que $d_v = 24/10$, les autres paramètres restant les mêmes que dans les questions précédentes.
      Montrer qu'alors l'équilibre homogène est instable par rapport aux perturbations d'une certaine forme. La déterminer et la dessiner avec soin.