Université Claude Bernard Lyon 1
43, boulevard du 11 novembre 1918
69622 Villeurbanne cedex, France

Licence Sciences & Technologies
Spécialité : Mathématiques
UE : EDP et émergence de structures

Contrôle Final Ecrit
7 mars 2017

Avant propos.

La durée de l'examen est de 1h30. Aucun document et aucune calculatrice ne sont autorisés durant l'épreuve. L'usage des téléphones est prohibé. La répartition en durée de chacun des exercices n'est qu'à titre indicatif. La justification des réponses et un soin particulier de la présentation seront demandés et pris en compte lors de la notation.

Questions de cours (10 minutes) (6 points)

1. (3 points) Énoncer les définitions des conditions aux bords de Dirichlet et Neumann homogènes. Donner une interprétation de ces conditions ainsi que le comportement des solutions de l'équation de la chaleur quand t tend vers l'infini pour chacune de ces conditions.
2. (3 points) Donner (sans la redémontrer) l'expression des fonctions propres de l'opérateur de diffusion ainsi que les valeurs propres associées sous les conditions de bord de Dirichlet homogènes pour $x \in [0, L]$ pour $L = \pi$, puis $L = 10\pi$

Exercice 1 (40 minutes) (8 points)

Le but de ce problème est de résoudre en dimension 1 sur l'intervalle $[0, L]$, $L > 0$, l'équation de la chaleur suivante avec des conditions aux bords mixtes :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(t,x) &= \Delta_x u(t,x), \text{ pour } 0 < x < L, \text{ et } t > 0, \\ u(t,L) &= 0, \text{ pour } t > 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(t,0) &= 0, \text{ pour } t > 0, \\ u(0,x) &= f(x), \text{ pour } 0 < x < L, \end{cases}$$

où f est une fonction quelconque à valeurs dans $\mathbb{R}$ "suffisamment régulière".

1. Préciser quel sont les types de condition en $x = 0$ et en $x = L$.
2. Donner en détaillant les calculs, l'expression des fonctions propres du Laplacien pour ces conditions aux bords mixtes.
3. En déduire l'expression des valeurs propres associées à ces fonctions propres.

4. Résoudre le problème dans le cas où la fonction f est une fonction propre trouvée dans la première question.
5. Que signifie mathématiquement le terme “suffisamment régulière” pour f ?
6. On considère ici $L = 2$. Résoudre le problème pour la fonction f définie pour tout $x \in]0, 2[$ par
$$f(x) = 17 + 2\cos(\frac{3\pi}{4}x) + 21\cos(\frac{5\pi}{4}x).$$
7. A partir de la solution de la question précédente, calculer $\lim\limits_{t \mapsto +\infty} u(t, x)$.

Exercice 2 (40 minutes) (8 points)

Le but de l'exercice est d'étudier le système suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} &= c_1 \dfrac{u^2(t,x)}{v(t,x)} - c_2 u(t,x) + d_u \Delta u(t,x), \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} &= c_3 u^2(t,x) - c_4 v(t,x) + d_v \Delta v(t,x). \end{cases}$$

où c_1, c_2, c_3, c_4, d_u et d_v sont des coefficients STRICTEMENT POSITIFS.

1. Montrer que la réaction de ce système admet un équilibre non nul, qu'on notera (u_0, v_0) et qu'on calculera en fonction de c_1, c_2, c_3 et c_4.
2. Donner la condition sur c_1, c_2, c_3 et c_4 pour que la réaction de ce système vérifie la règle des signes de Turing en (u_0, v_0).
3. On considère le cas : $c_1 = c_2 = c_3 = 1$ et $c_4 = 2$.
   (a) Calculer la trace et le déterminant de J, la Jacobienne de la réaction en (u_0, v_0).
   (b) En déduire la stabilité linéaire de l'équilibre homogène en l'absence de diffusion ($d_u = d_v = 0$).
   (c) On se place maintenant sur le domaine spatial $[0, \pi]$, avec des conditions de **Dirichlet homogènes**. On note λ_n, $n \in \mathbb{N}$, les valeurs propres du Laplacien. On suppose maintenant que $d_v = 24/10$, les autres paramètres restant les mêmes que dans les questions précédentes.
   Montrer qu'alors l'équilibre homogène est instable par rapport aux perturbations d'une certaine forme. La déterminer et la dessiner avec soin.