Université Claude Bernard Lyon 1 — Mathématiques Post-Paces
Semestre de printemps 2020-2021

Examen final - Partie 1- (1h)

Session 2 - Vendredi 25 juin 2021

Préambule :
Indiquez sur la copie vos **NOM et PRÉNOM**. La justification des réponses et un soin particulier apporté à la présentation sont demandés et seront pris en compte lors de la notation.

Le sujet comporte 3 exercices indépendants.

Exercice 1. *30 minutes - 8 points*
Soit la fonction f **paire**, 2π**-périodique** définie pour tout $x \in [0,\pi]$ par $f(x) = \pi - x$.

1. Faire un rapide dessin de la fonction.
2. Est-ce que f est partout égale à la somme de sa série de Fourier ?
3. Déterminer sa série de Fourier en formulation réelle puis en déduire sa série de Fourier en formulation complexe.
4. En déduire la valeur des sommes suivantes
$$S_1 = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \quad \text{et} \quad S_2 = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^4}.$$
Indication : pour la dernière somme, on pourra utiliser l'égalité de Parseval.
5. (BONUS) (+1 point) En remarquant que
$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k)^2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)^2},$$
trouver la valeur de $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Exercice 2. *15 minutes - 6 points*

1. Énoncer, sans le démontrer le théorème de Fubini.
2. Soit $x \in [0,1]$, en le justifiant, calculer l'intégrale suivante :
$$\int_0^1 \int_x^1 \cos(y^2)dydx.$$
3. Dessiner le domaine d'intégration de la question précédente.

Exercice 3. *15 minutes - 6 points*

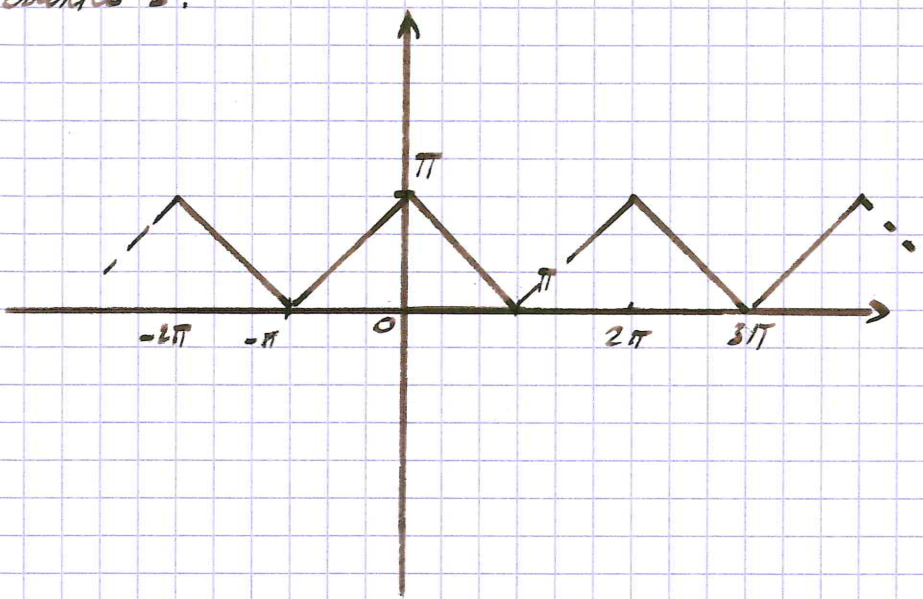
1. Calculer le rayon de convergence de la série entière de terme général

$$\frac{n(x+2)^n}{3^{n+1}}, \text{ où } x \in \mathbb{R} \text{ et } n \in \mathbb{N}.$$

2. Quelle est la nature (convergente ou divergente) de cette série si $x = -5$.
3. Quelle est la nature (convergente ou divergente) de cette série si $x = 1$.
4. Que peut-on en conclure ?

Exercice 1.

1.



2. f est continue sur $\mathbb{R}$ et admet une dérivée à droite et à gauche partout sur $\mathbb{R}$, donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x)$ est égale à la somme de sa série de Fourier.

3. Etant donné que f est paire, on a $\boxed{b_n = 0}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Calculons donc a_0, et a_n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Comme f est paire $a_0 = 2.\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi f(x)dx\right) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (\pi - x)dx = \frac{1}{\pi}\left[\pi x - \frac{x^2}{2}\right]_0^\pi$

$$\boxed{a_0 = \frac{\pi}{2}}$$

et pour $n \in \mathbb{N}^*$ $\quad a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos(nx)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi (\pi - x)\cos(nx)dx$

$$= \underbrace{2\int_0^\pi \cos(nx)dx}_{=0} - \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos(nx)dx = \frac{-2}{\pi n^2}\left(\cos(n\pi) - 1\right)$$

$$= \frac{2}{\pi n^2}\left[(1) - (-1)^n\right]$$

donc pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $\boxed{a_{2p} = 0 \quad \text{et} \quad a_{2p-1} = \frac{4}{\pi(2p-1)^2}}$

Ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}$ $\quad \boxed{f(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{\cos((2p-1)x)}{(2p-1)^2}}$

En formulation complexe: $\begin{cases} c_n = \frac{a_n - ib_n}{2} \\ c_0 = a_0 \end{cases}$ donc $\begin{cases} c_{2p-1} = \frac{a_{2p-1}}{2} = \frac{2}{\pi(2p-1)^2}, p \in \mathbb{N} \\ c_0 = \frac{\pi}{2} \end{cases}$

4. Comme $f(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{\cos((2p-1)x)}{(2p-1)^2}$

- En prenant $x=0$ on obtient : $f(0) = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{(2p-1)^2}$

soit encore $\pi - \frac{\pi}{2} = \frac{4}{\pi}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^2} \Rightarrow \boxed{\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}}$

- Grâce à l'égalité de Parseval :

$\|f\|^2 = |a_0|^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2$

or : $\|f\|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}(\pi-x)^2\,dx = \frac{\pi^2}{3}$

et $|a_0|^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2 = \frac{\pi^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{+\infty}\left(\frac{4}{\pi(2p-1)^2}\right)^2$

On a donc l'égalité :

$$\frac{\pi^2}{3} = \frac{\pi^2}{4} + \frac{8}{\pi^2}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^4}$$

Ainsi $\boxed{\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^4} = \frac{\pi^2}{8}\cdot\left(\frac{\pi^2}{3}-\frac{\pi^2}{4}\right) = \frac{\pi^4}{96}}$

D'autre part : $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{(2p)^2} + \sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{(2p-1)^2}$

Remarque : on peut les séparer, car pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ $\sum_{n=1}^{2p}\frac{1}{n^2} = \sum_{p=1}^{p}\frac{1}{(2p)^2} + \sum_{p=1}^{p}\frac{1}{(2p-1)^2}$
et chaque terme converge.

Si on note $S = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ on a $S = \frac{1}{4}S + \sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{(2p-1)^2}$

Donc $S\left(1-\frac{1}{4}\right) = \frac{\pi^2}{8}$ donc $\boxed{S = \frac{\pi^2}{8}\cdot\frac{4}{3} = \frac{\pi^2}{6}}$

If $a_n = n(x+2)^n/3^{n+1}$, then

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(n+1)(x+2)^{n+1}}{3^{n+2}} \cdot \frac{3^{n+1}}{n(x+2)^n}\right|$$

$$= \left(1 + \frac{1}{n}\right)\frac{|x+2|}{3} \to \frac{|x+2|}{3} \quad \text{as } n \to \infty$$

Using the Ratio Test, we see that the series converges if $|x+2|/3 < 1$ and it diverges if $|x+2|/3 > 1$. So it converges if $|x+2| < 3$ and diverges if $|x+2| > 3$. Thus, the radius of convergence is $R = 3$.

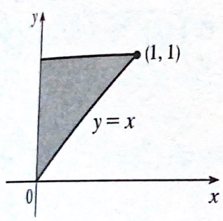
The inequality $|x+2|<3$ can be written as $-5<x<1$, so we test the series at the endpoints -5 and 1. When $x=-5$, the series is

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(-3)^n}{3^{n+1}} = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n$$

which diverges by the Test for Divergence [$(-1)^n n$ doesn't converge to 0]. When $x=1$, the series is

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(3)^n}{3^{n+1}} = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty} n$$

which also diverges by the Test for Divergence. Thus, the series converges only when $-5<x<1$, so the interval of convergence is $(-5, 1)$.



$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \int_x^1 \cos(y^2)\,dy\,dx &= \int_0^1 \int_0^y \cos(y^2)\,dx\,dy \\
&= \int_0^1 \cos(y^2)\left[\,x\,\right]_{x=0}^{x=y} dy = \int_0^1 y\cos(y^2)\,dy \\
&= \left[\tfrac{1}{2}\sin(y^2)\right]_0^1 = \tfrac{1}{2}\sin 1
\end{aligned}
$$