INSA Lyon
Bât. Louis PASTEUR
11 Avenue Jean Capelle
69621 Villeurbanne

Bioinformatique et modélisation
3ème année
UE : Equations différentielles et modélisation

Contrôle Final Ecrit-EDO-3BIM
2 novembre 2016

Avant propos.

La durée de l'examen est de 2h00. Aucun document, ni calculatrice, ni téléphone autorisés durant l'épreuve. La justification des réponses et un soin particulier de la présentation seront demandés.

Question de cours (20 minutes) (5 points)

1. (2 points) Énoncer le théorème d'existence et d'unicité locale de Cauchy-Lipschitz pour les problèmes de Cauchy.
2. (3 points) Énoncer et démontrer le lemme de Gronwall sous forme d'inéquation intégrale.

Exercice 1 (40 minutes) (7 points)

1. (5 points) Considérons l'équation différentielle suivante

$$(\mathscr{E}_1) \quad \frac{dx}{dt} = rx - \frac{x}{1+x^2},$$

définie sur $I \subset \mathbb{R}$, avec $x(t_0) = x_0$, où $t_0 \in I$, $x_0 \in \mathbb{R}$, et avec $r \in \mathbb{R}$.

(a) (0.5 point) Montrer que l'on a l'existence et l'unicité locale de la solution de ce problème.

(b) (0.5 point) Pour chaque (t_0, x_0) donné, où $t_0 \in I$, la solution est-elle strictement monotone ? Si oui, pourquoi ?

(c) (1 point) Trouver les d'équilibre x^* de l'équation différentielle $(\mathscr{E}_1)$ en fonction de r.

(d) (1 points) Déterminer la nature des équilibres (stable, instable, etc.) en fonction de r.

(e) (1 points) En vous servant des questions précédentes, dessiner le diagramme de bifurcation correspondant à $(\mathscr{E}_1)$. Identifier le type de bifurcation.

(f) (1 point) Tracer quelques trajectoires "représentatives" des solutions de $(\mathscr{E}_1)$.

2. (2 points) Considérons maintenant l'équation

$$(\mathscr{E}_2) \quad \frac{dx}{dt} = rx + \frac{x^3}{1+x^2},$$

définie pour $t \in I \subset \mathbb{R}$, avec $x(t_0) = x_0$, où $t_0 \in I$ et $x_0 \in \mathbb{R}$, et $r \in \mathbb{R}$.

(a) (1 point) Montrer que l'équation $(\mathscr{E}_2)$ peut s'écrire sous la forme

$$(\mathscr{E}_3) \quad \frac{dx}{dt} = Rx - \frac{x}{1+x^2},$$

où R est à déterminer.

(b) (1 point) En déduire un diagramme de bifurcation associé à l'équation $(\mathscr{E}_2)$.

Exercice 2 (30 minutes) (5 points)

Considérons l'équation différentielle suivante

$$(\mathscr{E}_4) \quad \ln(t)x'(t) + \frac{x(t)}{t} = 1, \quad t > 0.$$

1. (0.5 point) L'équation $(\mathscr{E}_4)$ est-elle linéaire ?
2. (0.5 point) Reconnaître la dérivée d'un produit de fonctions dans le premier membre de $(\mathscr{E}_4)$.
3. (1 points) En déduire l'expression explicite des solutions maximales de $(\mathscr{E}_4)$. On précisera les intervalles de définition de ces solutions *sans chercher à les raccorder à ce stade de l'analyse*.
4. On définit pour tout $(c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$, $y_{c_1,c_2} :]0,1[\cup]1,+\infty[,\ t \mapsto \begin{cases} \dfrac{t+c_1}{\ln(t)} & 0 < t < 1 \\ \dfrac{t+c_2}{\ln(t)} & t > 1 \end{cases}$.
   (a) (1 point) Soit $(c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$. Étudier les limites à gauche et à droite en 1 de y_{c_1,c_2}. *On discutera suivant les valeurs de* c_1 *et* c_2.
   (b) (1.5 point) Montrer qu'il existe un unique $(c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que y_{c_1,c_2} soit prolongeable sur $]0, +\infty[$ en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.
   (c) (0.5 point) L'équation $(\mathscr{E}_4)$ admet-elle des solutions globales ?

Exercice 3 (30 minutes) (4 points)

Considérons l'équation différentielle suivante :

$$(\mathscr{E}_5) \quad x' = rx - 2x^2 + x^3,$$

où $r \in \mathbb{R}$ est un paramètre, et x est une fonctions définie sur $I \subset \mathbb{R}$.

1. (1 point) Montrer que $x^* = 0$ est un équilibre pour tout $r \in \mathbb{R}$. Déterminer sa stabilité en fonction des valeurs de r. En déduire un point de bifurcation note r_1.
2. (1 point) Montrer que pour certaines valeurs prises par r il existe d'autres équilibres. Donner leur expression et déterminer leur stabilité. Identifier un deuxième point de bifurcation r_2.
3. (1 point) Identifier les types de bifurcations autour de r_1 et r_2.
4. (1 point) Tracer (avec soin) le diagramme de bifurcation.