INSA Lyon
Bât. Louis PASTEUR
11 Avenue Jean Capelle
69621 Villeurbanne

Bioinformatique et modélisation
3ème année
UE : Equations différentielles et modélisation
Automne 2017

Contrôle partiel écrit-EDO-3BIM
18 octobre 2017

Avant propos.

La durée de l'épreuve est de 1h00. Aucun document, ni calculatrice, ni téléphone autorisés durant l'épreuve. La justification des réponses et un soin particulier de la présentation seront demandés.

Question de cours (10 minutes) (6 points)

1. (2 points) Donner la définition d'un problème de Cauchy pour une équation différentielle d'ordre 1 sous forme normale.
2. (3 points) Énoncer, sans le démontrer, le théorème d'existence et d'unicité locale de Cauchy-Lipschitz pour les problèmes de Cauchy.
3. (1 point) Donner une condition suffisante sur la fonction f pour que l'on puisse appliquer ce théorème.

Exercice 1 (30 minutes) (10 points)

Considérons l'équation différentielle suivante

$$(\mathscr{E}_1) \qquad \frac{dx}{dt} = P(t) + Q(t)x + R(t)x^2,$$

définie sur $I \subset \mathbb{R}$, avec $x(t_0) = x_0$, où $t_0 \in I$ et $x_0 \in \mathbb{R}$. Dans toute la suite, nous supposerons les fonctions P, Q et R continues sur I.

1. (1 point) Est-ce que cette équation $(\mathscr{E}_1)$ est linéaire ou non ? Justifier la réponse.
2. (1 point) A-t-on existence et unicité locale de ce problème ?
3. (1 point) Reconnaître ce type d'équation.
4. (4 points) Soit x_p une solution particulière de $(\mathscr{E}_1)$. On considère u une fonction dérivable telle que $x = u + x_p$.
   (a) Écrire $(\mathscr{E}_1)$ en fonction de u.
   (b) Reconnaître une nouvelle équation (justifier votre réponse) non linéaire.
   (c) Par un autre changement de variable qu'il faudra donner, trouver une équation linéaire tirée de l'équation de la question précédente.
   (d) Donner la solution de cette équation linéaire en fonction de P, Q et R.
   (e) Puis en déduire les solutions u et x en fonction de P, Q et R.
5. (3 points) Application.
   Considérons l'équation différentielle suivante

$$(\mathscr{E}_2) \qquad \frac{dx}{dt} = -\frac{4}{t^2} - \frac{x}{t} + x^2,$$

de condition initiale $x(1) = 1$.

(a) Chercher la valeur de $a > 0$ telle que $x_p = \dfrac{a}{t}$ soit une solution particulière de $(\mathscr{E}_2)$.

(b) En utilisant la technique décrite précédemment résoudre $(\mathscr{E}_2)$.

Exercice 2 (20 minutes) (6 points)

Considérons l'équation différentielle suivante

$$(\mathscr{E}_3) \quad \frac{dx}{dt} = x(1-x)(x-M),$$

définie sur $I \subset \mathbb{R}$, avec $x(t_0) = x_0$, où $t_0 \in I$ et $x_0 \in \mathbb{R}$, où M est un réel tel que $0 < M < 1$.

1. (1 point) Est-ce que cette équation $(\mathscr{E}_3)$ est linéaire ou non ? Justifier la réponse.
2. (1 point) A-t-on existence et unicité locale de ce problème ?
3. (1 point) La solution de ce problème est-t-elle monotone ou non ? Justifier la réponse.
4. (1 point) Trouver les équilibre de $(\mathscr{E}_3)$.
5. (1 point) Faire un portrait de phase correspondant au problème.
6. (1 point) Dessiner quelques trajectoires significatives représentant les solutions de ce problème suivant la position de la condition initiale.