**INSA Lyon**
**Bât. Louis PASTEUR**
**11 Avenue Jean Capelle**
**69621 Villeurbanne**

**Bioinformatique et modélisation**
**3ème année**
**UE : Equations différentielles et modélisation**
**Printemps 2021**

# Contrôle écrit-EDO-Numérique 3BIM
## 9 juin 2021

### Avant propos.

La durée de l'épreuve est de 1h00. Aucun document, ni calculatrice, ni téléphone autorisés durant l'épreuve. La justification des réponses et un soin particulier de la présentation seront demandés.

### Exercice 1 (30 minutes) (10 points)

Considérons l'équation différentielle

$$(\mathscr{E}_1) \quad u'(t) + 10u(t) = 0,$$

pour $t \in \mathbb{R}$ avec la condition initiale suivante $u(0) = u_0 > 0$.

1. (1 point)) En détaillant les calculs, montrer que ce système admet l'unique solution $u(t) = ce^{-10t}$, où $c$ est la constante à déterminer.
2. (1 point) Tracer la solution quand $u_0 = 1$ et déterminer la limite quand $t$ tend vers $+\infty$.
3. (1 point) On considère maintenant $t \in [0, T]$ où $T > 0$ pourra être pris aussi grand que l'on veut et le schéma numérique suivant
$$u_{n+1} = u_n - 5h(u_{n+1} + u_n), \text{ pour } n = 0, ..., N-1 \,.$$
4. (1 point) Donner une relation entre $h$, $N$ et $T$.
5. (3 points) Écrire $u_{n+1}$ en fonction de $u_n$. En déduire que la suite $(u_n)$ est une suite connue.
6. (2 points) Exprimer $u_n$ en fonction de $n$.
7. (1 point) Que se passe-t-il si $n$ tend vers $+\infty$ ?
8. Que peut-on en déduire sur la A-stabilité de ce schéma ?
9. Bonus : reprendre les questions précédentes dans le cas où le schéma est un schéma d'Euler explicite.

### Exercice 2 (25 minutes)(6 points)

On considère le schéma $(\mathscr{S}_1)$ suivant

$$(\mathscr{S}_1) \quad \begin{cases} X_1 &= x_n, \\ X_2 &= x_n + \dfrac{h}{2} f(t_n, x_n), \\ X_3 &= x_n + hf(t_n, x_n), \\ x_{n+1} &= x_n + h\alpha f(t_n, X_1) + h\beta f(t_n + \dfrac{h}{2}, X_2) + h\gamma f(t_n + h, X_3). \end{cases}$$

où $f$ provient du problème de Cauchy que l'on souhaite approximer, $x' = f(t, x)$ avec $t \in [0, T]$, $T > 0$, $x(0) = x_0$ et $f$ est lipschitzienne par rapport à sa variable $x$..

1. Montrer que ce schéma peut s'écrire sous la forme du tableau de Butcher suivant

$$
\begin{array}{c|ccc}
0 & 0 & 0 & 0 \\
1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 \\
\hline
 & \alpha & \beta & \gamma
\end{array}
$$

.

2. Quelle est la condition pour que le schéma soit consistant d'ordre au moins 1.
3. Montrer que le schéma est d'ordre au moins 2 si et seulement si $\alpha + \beta + \gamma = 1$ et $\beta + 2\gamma = 1$.
4. Le schéma est-il stable.