

NOM :
PRÉNOM :
NUMÉRO ETUDIANT :

Licence Sciences pour la santé
Mathématiques - Licence 1
Automne 2025

Examen (45 min - 3 novembre 2025)

Attention : rédiger directement sur la feuille. Documents, calculatrice, téléphone non autorisés.

Question de cours (4 points)

1. On considère $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite arithmético-géométrique : **(a)** donner sa forme, **(b)** expliquer dans quel cas la suite est alternée, **(c)** expliquer dans quel cas la suite est convergente. Bien justifier.
2. Énoncer le théorème du point fixe (existence-unicité)

Réponse :

Exercice (6 points)

Partie 1. Considérons la fonction f définie par $f(x) = \frac{3x^2}{x^2 + 2}$

1. Quel est le domaine de définition de f ?
2. Montrer que les équilibres sont $l_1 = 0$, $l_2 = 1$ et $l_3 = 2$.
3. Montrer que la dérivée de f est $f'(x) = \frac{12x}{(x^2 + 2)^2}$.
4. D'après un théorème qu'il faudra nommer sans l'énoncer, en déduire la stabilité de chacun des équilibres.

Réponse :

Partie 2. On considère toujours la fonction de la Partie 1.

1. Expliquer pourquoi f est continue sur son domaine de définition ?
2. On considère $x \in I = [-1, 1]$.
 - (a) Expliquer pourquoi f est décroissante sur $[-1, 0]$ et croissante sur $[0, 1]$.
 - (b) Calculer $f(-1)$, $f(0)$ et $f(1)$. L'intervalle $[-1, 1]$ est-il stable par f ?
3. On considère $x \in I = [-1/2, 1/2]$.
 - (a) Expliquer pourquoi f est décroissante sur $[-1/2, 0]$ et croissante sur $[0, 1/2]$.
 - (b) Calculer $f(-1/2)$, $f(0)$ et $f(1/2)$. L'intervalle $[-1/2, 1/2]$ est-il stable par f ?
 - (c) Sans le calculer, d'après la partie 1, que pourrait-on dire de $\max_{x \in [-1/2, 1/2]} |f'(x)|$? Expliquer.
4. Représenter sur le graphe la suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$, avec $n \in \mathbb{N}$ et $u_0 = 0.6$.

Réponse :

