Examen 2025

[a = 0 ⇒ stationnaire
b = 0 ⇒ géométrique
a = 1 ⇒ arithmétique]

(4) Question de cours

1. a. Une suite arithmético-géométrique est de la forme $u_{n+1} = au_n + b$ avec u_0 donné. a et b sont appelés raison de cette suite.

0.5

b. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est alternée si et seulement si a est strictement négatif.

0.5 (si $f(x) = ax+b$, on a $a<0$), car alors f est décroissante ($u_{n+1} = f(u_n)$)

c. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente si et seulement si $\max_{x\in\mathbb{R}} |f'(x)| < 1$

1 a ici $f'(x) = a$ donc si et seulement si $|a|<1$ car $-1<a<1$

2. Théorème du point fixe : voir cours.

2

Exercice :

Partie 1 : On considère $f : x \mapsto \dfrac{3x^2}{x^2+2}$

1. $\mathcal{D}_f$? $\mathcal{D}_f = \{x \in \mathbb{R},\ x^2+2 \neq 0\}$ or $x^2+2 > 0$ donc jamais nul ($x^2 \geq 0$) ainsi $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$

2. **Montrer que les équilibres** (points fixes) sont $\ell_1 = 0$, $\ell_2 = 1$ et $\ell_3 = 2$

Les équilibres de f vérifient $f(\ell) = \ell$ sur $\ell \in \mathcal{D}_f = \mathbb{R}$

Résolvons $f(\ell) = \ell$:

$$f(\ell) = \ell \iff \frac{3\ell^2}{\ell^2+2} = \ell$$

$\Leftrightarrow 3\ell^2 = \ell(\ell^2+2)$

$\Leftrightarrow 3\ell^2 = \ell^3 + 2\ell$

$\Leftrightarrow \boxed{\ell^3 - 3\ell^2 + 2\ell = 0}$

$0^3 - 2\cdot 0^2 + 0 = 0$ ✓

$1^3 - 3\cdot 1^2 + 2\cdot 1 = 1 - 3 + 2 = 0$ ✓

$2^3 - 3\cdot 2^2 + 2\cdot 2 = 8 - 12 + 4 = 0$ ✓

(1 polynôme de $d°3$ il n'y a pas plus de 3 racines)

$\Leftrightarrow \ell(\ell^2 - 3\ell + 2) = 0$

$\Leftrightarrow \boxed{\ell_1 = 0}$ ou $\ell^2 - 3\ell + 2 = 0$

on cherche $\Delta = 9 - 4\cdot 2 = 9 - 8 = 1$

on a 2 solutions $\ell_2 = \frac{3-\sqrt{1}}{2}$ $\quad \ell_3 = \frac{3+\sqrt{1}}{2} = \frac{3+1}{2} = \frac{4}{2} = \boxed{2}$

$= \frac{2}{2} = 1$

$ax^2+bx+c=0$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta < 0$ pas de solution

$\Delta = 0$ 1 solution $x = \frac{-b}{2a}$

$\Delta > 0$ 2 solutions $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

il y a donc 3 points fixes $\ell_1 = 0$, $\ell_2 = 1$ et $\ell_3 = 2$ et ce sont les seuls.

3. **Montrer que** $f'(x) = \boxed{\frac{12x}{(x^2+2)^2}}$

Ici on a pour tout $x \in D_f = \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{3x^2}{x^2+2}$ de la forme $\frac{u}{v}$. D'où $f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

avec $u = 3x^2$, $u' = 6x$

$v = x^2+2$, $v' = 2x$

Par conséquent $f'(x) = \frac{6x\cdot(x^2+2) - 3x^2\cdot 2x}{(x^2+2)^2}$

$= \frac{6x^3 + 12x - 6x^3}{(x^2+2)^2} = \boxed{\frac{12x}{(x^2+2)^2}}$

4. D'après le théorème des points fixes attractifs et répulsifs (dernier théorème du cours) on calcule $f'(\ell)$:

- pour $\ell_1 = 0$ $\quad f'(0) = \frac{12\cdot 0}{(0^2+2)^2} = 0$ $\quad |f'(0)| = 0 < 1$ donc ℓ_1 est ATTRACTIF
- pour $\ell_2 = 1$ $\quad f'(1) = \frac{12\cdot 1}{(1^2+2)^2} = \frac{12}{(3)^2} = \frac{3\times 4}{3\cdot 3} = \frac{4}{3}$ donc $|f'(1)| = |\frac{4}{3}| = \frac{4}{3} > 1$
- pour $\ell_3 = 2$ $\quad f'(2) = \frac{12\cdot 2}{(2^2+2)^2} = \frac{3\times 2\times 2\times 2}{6^2} = \frac{3\times 2\times 2\times 2}{3\times 3\times 2\times 2} = \frac{2}{3}$ donc $|f'(2)| = |\frac{2}{3}| = \frac{2}{3} < 1$

donc ℓ_2 est RÉPULSIF !

et ℓ_3 est ATTRACTIF

Partie 2 : $f(x) = \dfrac{3x^2}{x^2+2}$

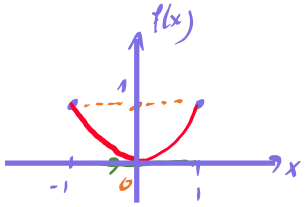
1. f est continue sur $D_f = \mathbb{R}$ comme quotient de 2 fonctions continues $x \mapsto 3x^2$ et $x \mapsto x^2+2$

2. $x \in I = [-1,1]$

a. D'après la question 3 de la partie 1, $\boxed{f'(x) = \dfrac{12x}{(x^2+2)^2}}$ or $(x^2+2)^2 > 0$ pour tout $x \in D_f$, donc $f'(x)$ est du signe de $12x$ càd $12x > 0$ si $x > 0$ et $12x < 0$ si $x < 0$

donc $f'(x) > 0$ — et $f'(x) < 0$ " $x < 0$

x	-1		0		1
signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
variations de f	1	↘	0	↗	$\frac{3}{1+2} = \frac{3}{3} = 1$



$f(x) = \frac{3x^2}{x^2+2}$

b. $f(-1) = 1$ $\quad f(0) = 0$ $\quad f(1) = 1$

D'après ce qui précède si $x \in [-1,1]$ alors $f(x) \in [0,1] \subset [-1,1]$

donc f est stable sur $[-1,1]$

3. Si $x \in I = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$

3. Si $x \in I = [-1/2, \frac{1}{2}]$

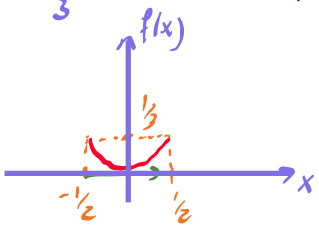
a. Par les mêmes arguments que 2.a de la partie 2 f est bien décroissante sur $[-1/2, 0]$ et croissante sur $[0, \frac{1}{2}]$ $\quad f(x) = \frac{3x^2}{x^2+2}$

b. $f(-1/2) = \frac{1}{3}$ $\quad f(0) = 0$ $\quad f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{3}$ $\quad f(\frac{1}{2}) = \frac{3 \cdot \frac{1}{4}}{\frac{1}{4}+2}$

$= \frac{3/4}{\frac{1+8}{4}}$

$= \frac{3/4}{9/4} = \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{9} =$

$= \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$



D'après ce qui précède quand $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ alors $f(x) \in [0, \frac{1}{3}] \subset [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$

donc f est stable sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$

c. $\max_{x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]} |f'(x)|$?

le seul équilibre (point fixe) dans $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ est $\ell_1 = 0$ et d'après la partie 1, on sait qu'il est attractif donc on s'attendrait à ce que $\max_{x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]} |f'(x)| < 1$

(théorème du point fixe attractif)

→ f continue sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$

→ $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ stable par f

et pour avoir convergence vers $\ell_1 = 0$ il faudrait que $\max_{x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]} |f'(x)| < 1$ (strict. contractant sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.)

(si ce n'est pas le cas, il faut réduire l'intervalle)