Année universitaire 2024-2025
Semestre 3

Licence Sciences pour la Santé

Niveau de licence :	**Deuxième année**
Titre de l'enseignement :	**Mathématiques pour la Santé**
Nom des responsables :	**L. Pujo-Menjouet**
Date de l'épreuve :	**Lundi 4 novembre 2024**
Durée de l'épreuve	**45 minutes**

Documents et cours autorisés
une feuille de notes manuscrites en format A4 : OUI ☒ NON ☐

Préambule :
Indiquez sur la copie vos **NOM et PRÉNOM**. La justification des réponses et un soin particulier apporté à la présentation sont demandés et seront pris en compte lors de la notation.

Le sujet comporte 2 exercices indépendants.

Exercice 1. *35 minutes - 6 points*
Les deux parties sont indépendantes.

1. **Partie 1**.
   On considère l'équation différentielle $x'(t) = f(x(t))$ avec $f(x) = (4-2x)(x+1)^2x^3$.
   (a) Déterminer en le justifiant : l'ordre de cette équation, si elle est autonome ou pas, si elle est linéaire ou pas.
   (b) Montrer que les équilibres de cette équation sont 0 et 2 et -1 .

(c) Déterminers'il s'agit des équilibres localement asymptotiquement stables, instables ou shunt (positifs ou négatifs).

(d) Dessiner le portrait de phase, puis quelques trajectoires représentatives des différents cas.

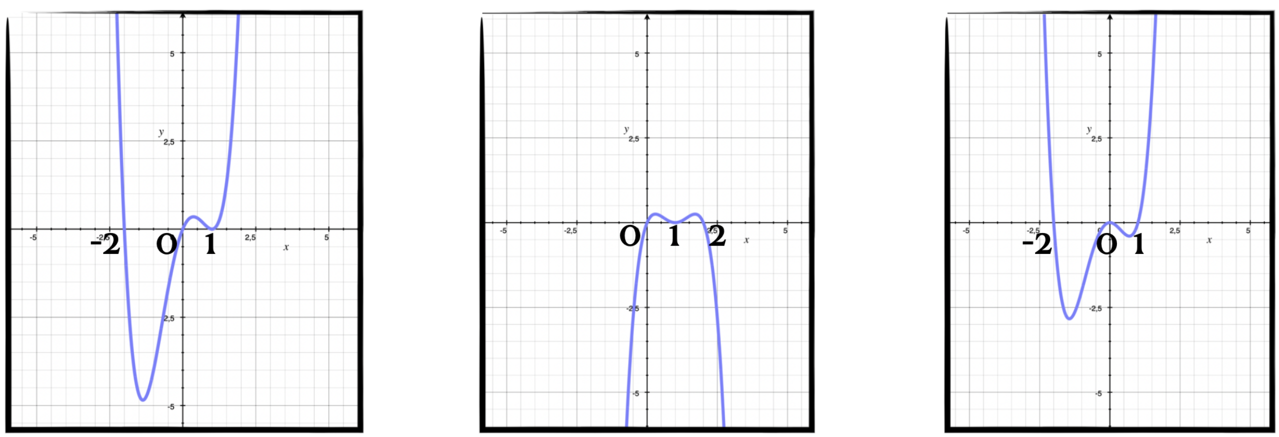
2. **Partie 2.**
On considère l'équation différentielles suivante

$$\sin(2t)x'(t) + 2\cos(2t)x(t) = t, \text{ avec } x(1) = 1.$$

(a) Déterminer en le justifiant : l'ordre de cette équation, si elle est autonome ou pas, si elle est linéaire ou pas.

(b) Résoudre cette équation.

<u>Exercice 2.</u> *10 minutes - 4 points* On considère les trois courbes suivantes :



A B C

1. (2 points) Dites laquelle correspondrait à l'équation différentielle $x'(t) = f(x(t))$ avec $f(x) = x(x-1)^2(x+2)$.
2. (2 points) En déduire les équilibres de cette équation, leur stabilité, le portrait de phase, et des courbes représentatives.

Examen 4 novembre 2024
L2 - SPS

Exercice 1 (6 points)

1. $x' = (4-2x)(x+1)^2 x^3$ $(\mathcal{E})$

a. $(\mathcal{E})$ est une EDO d'ordre 1 (terme x' ordre le plus élevé)
- autonome (aucun terme explicite en t)
- non linéaire à cause de x^3 par exemple

b. Les équilibres x^* de $(\mathcal{E})$ vérifient $x^{*\prime} = 0$ c'est à dire $f(x^*) = 0$

Or $f(x) = 0 \Leftrightarrow (4-2x)(x+1)^2 x^3 = 0$

$\Leftrightarrow 4-2x = 0$ ou $x+1 = 0$ ou $x = 0$

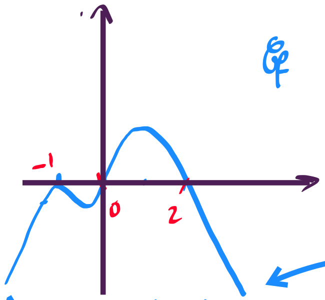
$\Leftrightarrow x = 2$ ou $x = -1$ ou $x = 0$

Les équilibres sont donc $\boxed{x^* = -1,\ 0 \text{ et } 2}$

c. Par deux méthodes (une seule suffit)

c. Par deux méthodes (une seule suffit)

méthode 1 : représentation graphique



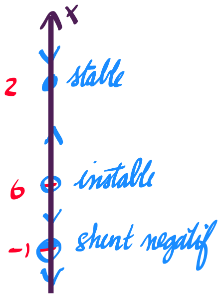
méthode 2 tableau de signes

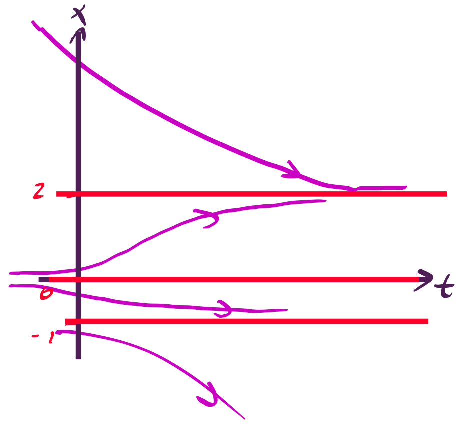
x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
signe de $4-2x$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
signe de $(x+1)^2$		$+$	0	$+$		$+$		$+$	
signe de x^3		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de $f(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} -2x \cdot x^2 \cdot x^3 = \lim_{x\to+\infty} -2x^6 = -\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} -2x \cdot x^2 \cdot x^3 = \lim_{x\to-\infty} -2x^6 = -\infty$$

c) et d) On en déduit le portrait de phase :





2. $(\mathcal{E})$ $\sin(2t)\,x'(t) + 2\cos(2t)\,x(t) = t$ $\quad x(1) = 1$

a. $(\mathcal{E})$ est une edo d'ordre 1 (plus haute dérivée est x')

. non autonome à cause des termes $\sin(2t)$, $\cos(2t)$ et t

. linéaire car de la forme $a(t)\,x'(t) + b(t)\,x(t) = g(t)$

b. On remarque que $(\sin(2t))' = 2\cos(2t)$

Donc $(\mathcal{E})$ est de la forme $(\sin(2t)\cdot x)' = t$

On intègre des 2 côtés : $\sin(2t)\cdot x = \frac{t^2}{2} + C$

donc $x(t) = \frac{t^2}{2\sin(2t)} + \frac{C}{\sin(2t)}$ avec $t \in]0, \pi[$

car condition initiale est $x(1) = 1$ ($t = 1$)

Enfin comme $x(1) = 1$ on a : $\frac{1}{2\sin(2)} + \frac{C}{\sin(2)} = 1$

et $\sin(0) = \sin(\pi) = 0$

$\sin(0) = \sin(\pi) = 0$

(on ne peut pas diviser par 0)

donc $1 + 2C = 2\sin(2)$

donc $2C = 2\sin(2) - 1$

et $\boxed{C = \sin(2) - \frac{1}{2}}$

La solution de $(\mathcal{E})$ est donc $\boxed{x(t) = \dfrac{t^2}{2\sin(2t)} + \dfrac{\sin(2) - \frac{1}{2}}{\sin(2t)}}$

<u>Exercice 2</u>

1. Les équilibres de $(\mathcal{E})$ sont 0, 1 et -2 avec $(x-1)^2$ d'exposant pair (donc l'équilibre sera un shunt en 1). Le seul graphe permettant ceci est le graphe A.

2. D'après 1) les équilibres de (E) sont $-2, 0$ et 1

et le portrait de phase se déduit du graphe A