3 novembre 2026.

correction de l'examen de 2025

$(u(t)\cdot x(t))' = t$

$u(t)\cdot x'(t) + u'(t)\cdot x(t) = t$

Exercice 1 : (E) $\boxed{\sqrt{3t}\,x'(t) + \frac{3}{2\sqrt{3t}}\,x(t) = t}$ avec $x(3)=1$

1. (E) est une edo d'ordre $\boxed{1}$ à cause du x' (dérivée la plus élevée)

(E) n'est pas autonome à cause des termes $\sqrt{3t}$ et t au second membre

(E) est linéaire car de la forme $a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t) = g(t)$

où $a_1(t) = \sqrt{3}$, $a_0(t) = \frac{3}{2\sqrt{3t}}$ et $g(t) = t$

2. A cause du terme $\frac{3}{2\sqrt{3t}}$ on suppose $\boxed{t \in I \subset]0,+\infty[}$ car la condition initiale est $x(3)=1$

$t_0 = 3$ doit être dans $]0,+\infty[$

Pour la résoudre on remarque que la dérivée de la fonction $t \mapsto \sqrt{3t}$ est la fonction $t \mapsto \frac{3}{2\sqrt{3t}}$

Rappel : $(\sqrt{u(t)})' = \frac{u'(t)}{2\sqrt{u(t)}}$

$u(t) = 3t$ $u'(t) = 3$

On en déduit que (E) s'écrit sous la forme

$\left(\sqrt{3t}\cdot x(t)\right)' = t$ avec $t \in I$, $(t>0)$ $\int f'(t)\,dt = f(t) + c$

on intègre des 2 côtés : $\sqrt{3t}\cdot x(t) = \frac{t^2}{2} + C$

on divise par $\sqrt{3t}$ on obtient $\boxed{x(t) = \frac{1}{\sqrt{3t}}\cdot\left(\frac{t^2}{2} + C\right)}$ $(*)$

On trouve c à partir de la condition initiale $x(3)=1$

on remplace dans $(*)$ $x(3) = 1 = \frac{1}{\sqrt{3\cdot 3}}\cdot\left(\frac{3^2}{2} + C\right) \Leftrightarrow 1 = \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{3^2}{2} + C\right)$

$\Leftrightarrow \quad 3 = \frac{3^2}{2} + C \rightarrow 3 - \frac{3^2}{2} = C$

$\Leftrightarrow \quad C = 3 - \frac{9}{2}$

$\Leftrightarrow \quad C = \frac{6-9}{2} = \boxed{-\frac{3}{2}}$ (1)

Par conséquent la solution du problème est

$$\boxed{x(t) = \frac{1}{\sqrt{3t}}\left(\frac{t^2}{2} - \frac{3}{2}\right) \text{ pour } t > 0}$$

Exercice 2 : on a $x' = f(x)$ où $f(x) = (6-3x)^2(1-x)^3 x$

1. C'est une edo d'ordre 1 (dérivée la plus élevée est x')
   elle est autonome (tous les t sont implicites (dérivés dans x et x')) (1)
   elle n'est pas linéaire car le coefficient devant est $(6-3x)^2(1-x)^3$ dépend de x !!

2. Les équilibres x^* de cette edo vérifient $x^{*\prime} = 0$ càd $\boxed{f(x^*) = 0}$

   a $f(x) = 0 \Leftrightarrow (6-3x)^2(1-x)^3 x = 0$

   $\Leftrightarrow (6-3x)^2 = 0$ ou $(1-x)^3 = 0$ ou $\boxed{x = 0}$

   $\Leftrightarrow 6 - 3x = 0$ ou $1 - x = 0$ (1)

   $\Leftrightarrow 6 = 3x$ ou $\boxed{x = 1}$

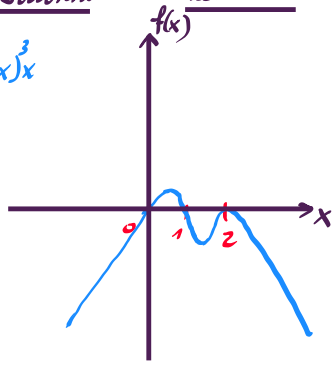
   $\Leftrightarrow x = \frac{6}{3} = \boxed{2}$

Par conséquent les équilibres sont 0, 1 et 2

3ème **Stabilité** : **méthode 1**

$\lim_{x \to +\infty} (6-3x)^2(1-x)^3 x$

$=$



or on sait que $(6-3x)^2(1-x)^3 x \underset{\infty}{\sim} 9x^2 \cdot (-x)^3 x$ ($(-3x)^2$, $-x$)

$\underset{\infty}{\sim} -9x^2 \cdot x^3 x$

$\underset{\infty}{\sim} \boxed{-9x^6}$

or $\lim_{x \to -\infty} -9x^6 = -\infty$ ($x \to +\infty$)

et $\lim_{x \to +\infty} -9x^6 = -\infty$ ($x \to +\infty$)

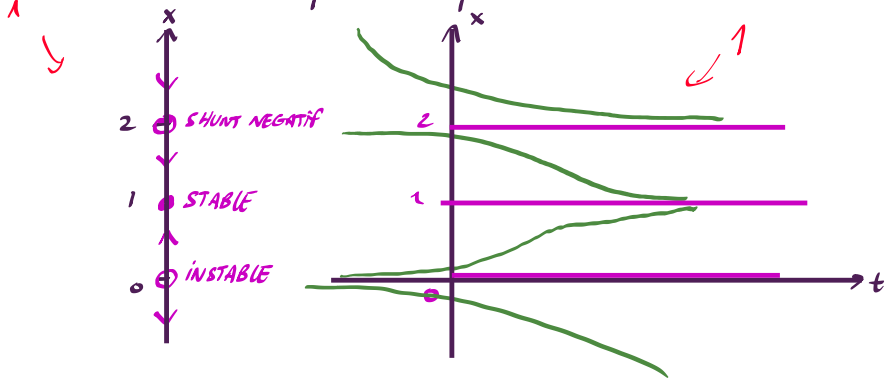
méthode 2

tableau des signes

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
signe de $(6-3x)^2$		$+$		$+$		$+$	0	$+$	

signe de $(1-x)^3$	+	+	0	−	−
signe de x	−	0	+	+	+
signe de $f(x)$	−	0	+	0	−

On en déduit le portrait de phase :

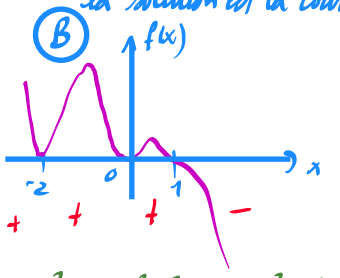


Exercice 3

1. Tableau de signes

x	$-\infty$		-2		0		1		$+\infty$
signe de $(1-x)^3$		+		+		+	0	−	
signe de $(x+2)^2$		+	0	+		+		+	
signe de x^2		+		+	0	+		+	
signe de $f(x)$		+	0	+	0	+	0	−	

la solution est la courbe B



$(1-x)^3 (x+2)^2 x^2 \underset{\infty}{\sim} -x^3 . x^2 . x^2$

$\underset{\infty}{\sim} -x^3$ ⟶ $\lim\limits_{x \to -\infty} -x^3 = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} -x^3 = -\infty$

autre méthode

2.

