Année universitaire 2020-2021
Semestre 1 - session 2

Licence Sciences pour la Santé

Niveau de licence :	**Première année**
Titre de l'enseignement :	**Mathématiques pour la Santé**
Nom des responsables :	**L. Pujo-Menjouet**
Date de l'épreuve :	**Mardi 15 décembre 2020**
Durée de l'épreuve	**45 minutes**

Documents et cours autorisés : OUI ☐ NON ☒

Préambule :
Indiquez sur la copie vos **NOM et PRÉNOM**. La justification des réponses et un soin particulier apporté à la présentation sont demandés et seront pris en compte lors de la notation.

Le sujet comporte 2 exercices indépendants.

Exercice 1. *20 minutes - 8 points*
Considérons l'équation récurrente

$$(\mathscr{E}_1) \quad x_{n+1} = f(x_n),\ f(x_n) = x_n exp(r(1 - \frac{x_n}{k})),$$

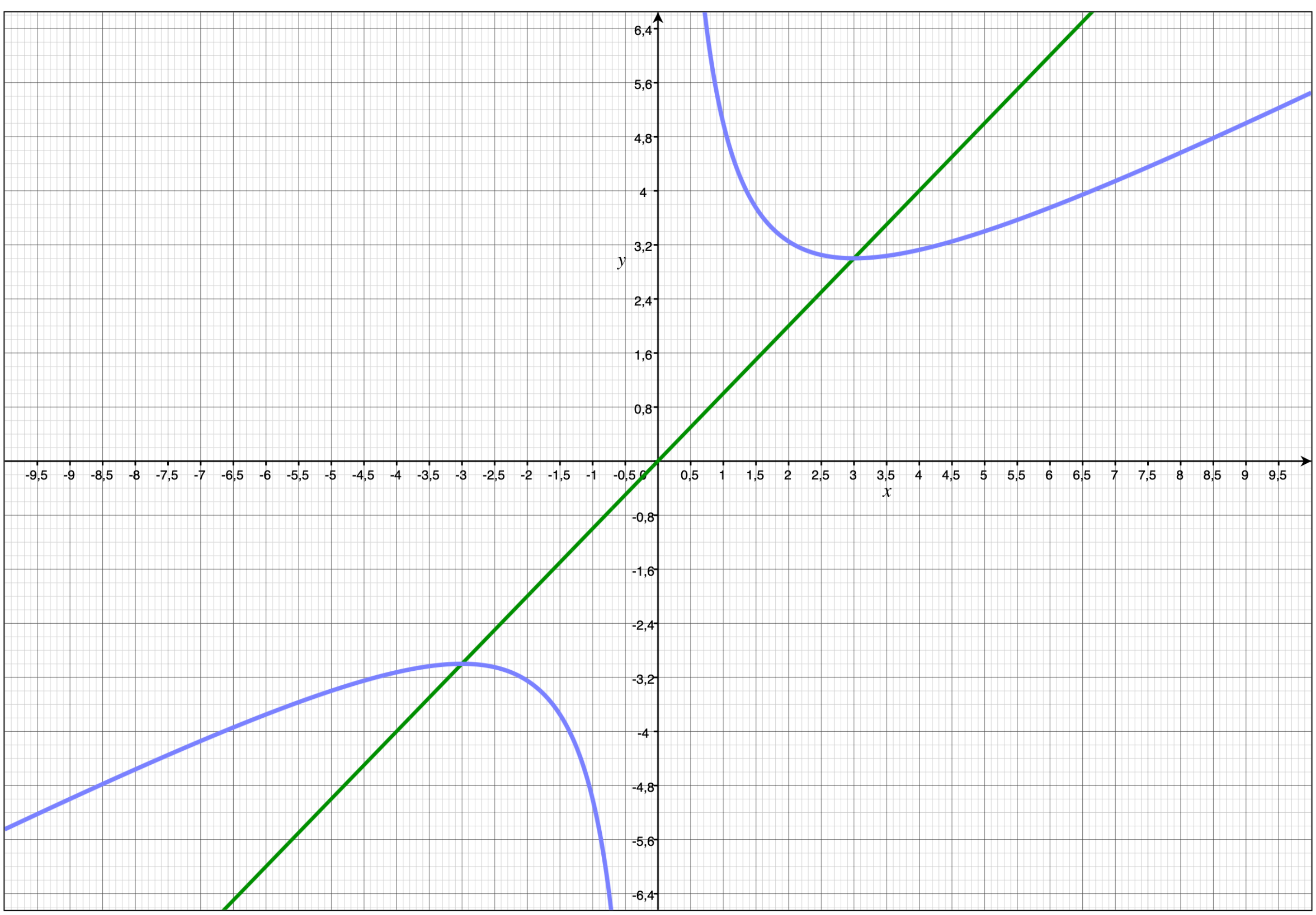
avec $n \in \mathbb{N}$, et r, k des réels strictement positifs.

1. Est-ce que $(\mathscr{E}_1)$ est linéaire ou pas ? Justifier.
2. (1 point) Déterminer le, ou les équilibres x^* de $(\mathscr{E}_1)$.
3. (1 point) Déterminer la stabilité pour chacun des équilibres trouvés (en fonction de r et k éventuellement).

Exercice 2. *25 minutes - 12 points*
Considérons l'équation récurrente non linéaire

$$(\mathscr{E}_2) \quad x_{n+1} = f(x_n),\ f(x_n) = x_n - \frac{x_n^2 - 9}{2x_n} \text{ avec } n \in \mathbb{N}.$$

1. (1 point) Expliquer pourquoi cette équation est non linéaire.
2. (1 point) **(Bonus)** Montrer par récurrence que si $x_0 \neq 0$ alors $x_n \neq 0$ pour $n \in \mathbb{N}$.
3. (1 point) Montrer qu'il existe deux équilibres qui sont -3 et 3.
4. (1 point) Montrer que pour tout $x \neq 0$, la dérivée première du second membre de $(\mathscr{E}_2)$ est $f'(x) = \dfrac{2x^2 - 18}{4x^2}$.
5. (1.5 point) En déduire alors la stabilité ou l'instabilité des deux équilibres.
6. (1.5 point) Sur le graphe ci-dessous, identifier les courbes et les équilibres, puis montrer l'attractivité ou la répulsivité des équilibres en prenant les conditions initiales suivantes : $x_0 = -1$ et $x_0 = 1$ en prenant des couleurs différentes.



Numéro de la feuille d'examen
à reporter ci-dessous :
N° 1

Licence sciences pour la santé
Examen session 2 - ~~15 décembre 2020~~ - JUIN 2021
Mathematiques pour la santé

Exercice 1 $(\mathcal{E}_1)$ $x_{n+1} = x_n e^{r(1-\frac{x_n}{k})}$ $n \in \mathbb{N}$, r et $k > 0$

1. $f : x \mapsto x e^{r(1-x/k)}$ n'est pas de la forme $ax+b$
donc $(\mathcal{E}_1)$ n'est pas linéaire

2. $x^* \in \mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ et $x^* = f(x^*)$

or $x^* = f(x^*) \Leftrightarrow x^* = x^* e^{r(1-\frac{x^*}{k})}$

$\Leftrightarrow 1 = e^{r(1-x^*/k)}$) en passant au ln de chaque côté

$\Leftrightarrow 0 = \underbrace{r}_{>0} (1 - \frac{x^*}{k})$

$\Leftrightarrow 1 - \frac{x^*}{k} = 0$

$\Leftrightarrow \boxed{x^* = k}$ un seul équilibre

3. Calculons $f'(x)$: soit $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = e^{r(1-x/k)} + x(\frac{-r}{k}) e^{r(1-\frac{x}{k})}$

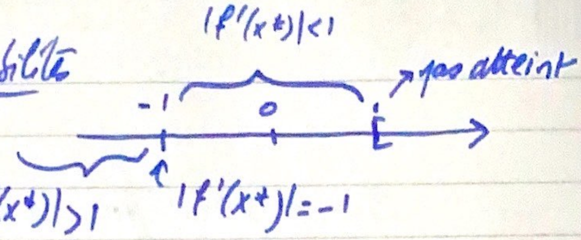
(rappel : $(e^{u(x)})' = u'(x) e^{u(x)}$ ici $u(x) = r(1-\frac{x}{k})$ et $u'(x) = \frac{-r}{k}$

en $x^* = k$ $f'(x^*) = f'(k) = e^{r(1-1)} + k(\frac{-r}{k}) e^{r(1-k/k)}$

$= 1 - r \cdot 1 = \boxed{1-r}$

avec $r > 0$, $-r < 0$ donc $\boxed{1-r < 1}$

② On a plusieurs possibilités



ⓐ si $|1-r|<1$ càd $-1<1-r<1$

$\Leftrightarrow -2<-r<0$

$\Leftrightarrow \boxed{0<r<2}$

alors $|f'(x^*)|<1$ et $x^*=k$ est asymptotiquement stable

ⓑ si $|1-r|>1$ càd $\underbrace{1-r>1}_{\text{pas possible car } r>0}$ ou $1-r<-1$

alors $1-r<-1 \Leftrightarrow -r<-2$

$\Leftrightarrow \boxed{r>2}$ on a $|f'(x^*)|>1$ donc $x^*=k$ est instable

si $1-r=-1$ càd $\boxed{r=2}$

alors il faudrait calculer le signe de $-2f''(x^*)-3f'''(x^*)$

si <0 : x^* est asymptotiquement stable

si >0 : x^* est instable

(en bonus : le calcul de $-2f''(x^*)-3f'''(x^*)$ mais je ne le demandais pas)

Exercice 2 $\quad x_{n+1}=x_n-\dfrac{x_n^2-9}{2x_n}$, $n\in\mathbb{N}$

1. $f: x \mapsto x-\dfrac{x^2-9}{2x}$ n'est pas de forme $ax+b$ donc

(E_2) n'est pas linéaire

Numéro de la feuille d'examen
à reporter ci-dessous :
N° 3

2. Montrons que P_n: "$x_n \neq 0$" est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$

. P_0: "$x_0 \neq 0$" vrai par hypothèse

. On suppose P_k vrai pour un certain entier k
Montrons que P_{k+1} est vrai, c'est à dire que $x_{k+1} \neq 0$
Or :

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^2-9}{2x_k}$$

$$= \frac{2x_k^2 - x_k^2+9}{2x_k} = \frac{x_k^2+9 > 0}{2x_k \neq 0} \text{ donc } x_{k+1} \neq 0$$

P_{k+1} est vrai

. Conclusion: P_n est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$

3. x^* vérifie $x^* = f(x^*)$, $x^* \in D_f = \mathbb{R}$

$$f(x^*) = x^* \Leftrightarrow x^* - \frac{x^{*2}-9}{2x^*} = x^*$$

$$\Leftrightarrow -\frac{x^{*2}-9}{2x^*} = 0$$

$$\Leftrightarrow x^{*2}-9 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^*-3)(x^*+3) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^* = 3 \text{ ou } -3$$

Il y a 2 équilibres possibles: $x_+^* = 3$ et $x_-^* = -3$

4. $$f'(x) = 1 - \frac{2x.2x - (x^2-9).2}{(2x)^2}$$

$$= \frac{4x^2 - 4x^2 + 2(x^2-9)}{4x^2} = \frac{2x^2-18}{4x^2}$$

④ 5. $f'(3) = f'(-3) = 0$ or $|0|<1$

donc x_-^+ et x_+^+ sont asymptotiquement stables

6. Faire le dessin sur le graphe.