Année universitaire 2020-2021
Semestre 1

Licence Sciences pour la Santé

Niveau de licence :	**Première année**
Titre de l'enseignement :	**Mathématiques pour la Santé**
Nom des responsables :	**L. Pujo-Menjouet**
Date de l'épreuve :	**Mardi 15 décembre 2020**
Durée de l'épreuve	**45 minutes**

Documents et cours autorisés : OUI ☐ NON ☒

Préambule :
Indiquez sur la copie vos **NOM et PRÉNOM**. La justification des réponses et un soin particulier apporté à la présentation sont demandés et seront pris en compte lors de la notation.

Le sujet comporte 2 exercices indépendants.

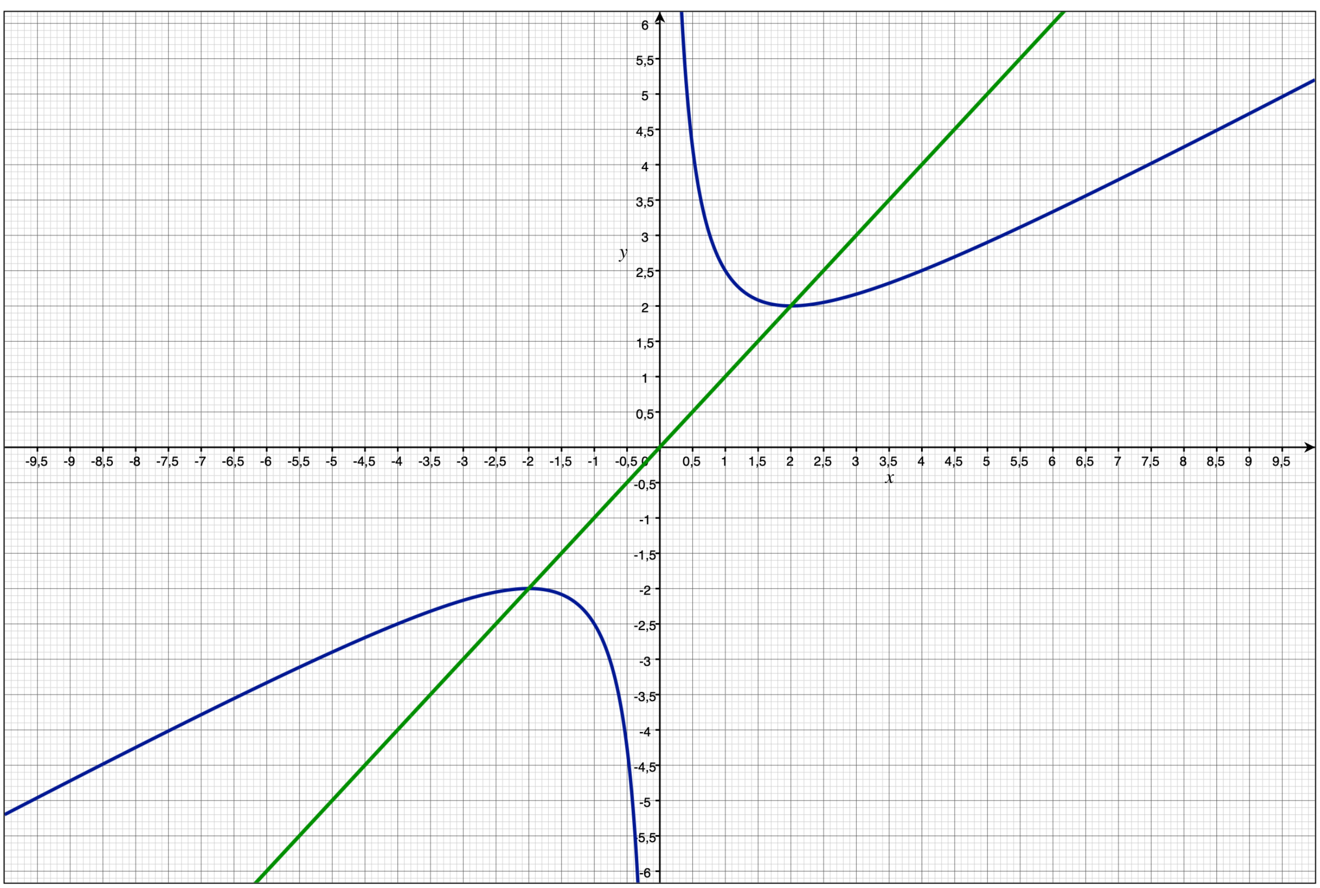
Exercice 1. ***Question de cours*** *- 10 minutes - 4 points*

1. (1 point) Donner la définition d'un équilibre x^* pour l'équation $x_{n+1} = f(x_n)$, $n \in \mathbb{N}$.
2. (1 point) Si $f'(x^*) \neq 1$ et $f'(x^*) \neq -1$, donner les conditions sur la dérivée de f pour que x^* soit :
   (a) (0.5 point) Localement asymptotiquement stable.
   (b) (0.5 point) Instable.
3. (2 points) Quelles conditions doit-on vérifier si $f'(x^*) = 1$ pour que x^* soit :
   (a) (1 point) Localement asymptotiquement stable.
   (b) (1 point) Instable .
4. (1 point) **(Bonus)** Même question que 3(a) et 3(b) si $f'(x^*) = -1$.

<u>Exercice 2.</u> *35 minutes - 6 points*
Considérons l'équation récurrente non linéaire

$$(\mathscr{E}) \quad x_{n+1} = f(x_n),\ f(x_n) = x_n - \frac{x_n^2 - 4}{2x_n} \text{ avec } n \in \mathbb{N}.$$

1. (1 point) Expliquer pourquoi cette équation est non linéaire.
2. (1 point) **(Bonus)** Montrer par récurrence que si $x_0 \neq 0$ alors $x_n \neq 0$ pour $n \in \mathbb{N}$.
3. (1 point) Montrer qu'il existe deux équilibres qui sont -2 et 2.
4. (1 point) Montrer que pour tout $x \neq 0$, la dérivée première du second membre de $(\mathscr{E}_1)$ est $f'(x) = \dfrac{2x^2 - 8}{4x^2}$.
5. (1.5 point) En déduire alors la stabilité ou l'instabilité des deux équilibres.
6. (1.5 point) Sur le graphe ci-dessous, identifier les cours et les équilibres, puis montrer l'attractivité ou la répulsivité des équilibres en prenant les conditions initiales suivantes : $x_0 = -1$ et $x_0 = 1$ en prenant des couleurs différentes.



Numéro de la feuille d'examen
à reporter ci-dessous :
N° 1

Licence sciences pour la santé
Examen session 1 - 15 DÉCEMBRE 2020 -
Mathématiques pour la santé

Correction

Exercice 1.

1. Un point x^* du domaine de définition de f est un point d'équilibre de l'équation $x_{n+1} = f(x_n)$ si c'est un point fixe de f c'est à dire que $f(x^*) = x^*$

2. On suppose $f'(x^*) \neq 1$ et $f'(x^*) \neq -1$

a. si $|f'(x^*)| < 1$ alors x^* est asymptotiquement stable

b. si $|f'(x^*)| > 1$ " " " instable

3. Si $f'(x) = 1$

a. si $f''(x^*) = 0$ et $f'''(x^*) < 0$ alors x^* est asymptotiquement stable

b. si $f''(x^*) \neq 0$ alors x^* est instable

si $f''(x^*) = 0$ et $f'''(x^*) > 0$ alors x^* est instable

4. BONUS: si $f'(x^*) = 1$
a. si $-2f'''(x^*) - 3f''(x^*)^2 < 0$ alors x^* est asymptotiquement stable
b. si " " > 0 alors x^* est instable

2

__Exercice 2__ : $(\mathcal{E})$ $x_{n+1} = x_n - \dfrac{x_n^2-4}{2x_n}$

On pose $f : x \mapsto x - \dfrac{x^2-4}{2x}$

1. $(\mathcal{E})$ ne s'écrit pas de la forme $x_{n+1} = a x_n + b$
donc $(\mathcal{E})$ n'est pas linéaire

2. Supposons $x_0 \neq 0$ montrons $\mathcal{P}_n$: "$x_n \neq 0$" pour tout $n \in \mathbb{N}$

- __pour__ $n=0$: c'est vrai par hypothèse ($x_0 \neq 0$)

- supposons $\mathcal{P}_k$ vraie ($x_k \neq 0$) pour un certain entier k
montrons que $\mathcal{P}_{k+1}$ est vrai (c'est à dire $x_{k+1} \neq 0$)

__or__ $x_{k+1} = x_k - \dfrac{x_k^2-4}{2x_k} = \dfrac{2x_k^2 - x_k^2+4}{2x_k} = \dfrac{x_k^2+4}{2x_k} \begin{matrix} >0 \\ \neq 0 \end{matrix}$

$x_k^2+4 \geq 4 > 0$ donc $\neq 0$

Par conséquent $x_{k+1} \neq 0$

- Conclusion $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. $f(x) = x - \dfrac{x^2-4}{2x}$ les équilibres $x^* \in \mathcal{D}_f$ et $x^* = f(x^*)$

__ici__ $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^*$ et $f(x^*) = x^* \Leftrightarrow x^* - \dfrac{x^{*2}-4}{2x^*} = x^*$

$\Leftrightarrow \dfrac{x^{*2}-4}{2x^*} = 0$

$\Leftrightarrow x^{*2} - 4 = 0$

$\Leftrightarrow (x^*-2)(x^*+2) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^* = 2 \\ \text{ou} \\ x^* = -2 \end{cases}$

Il existe donc 2 équilibres : $x^*_+ = 2$ et $x^*_- = -2$

Numéro de la feuille d'examen
à reporter ci-dessous :
N° 3

4. Pour determiner la stabilité de ces equilibres, determinons :

$f'(x)$.

Soit $x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) = 1 - \frac{2x \cdot 2x - (x^2 - 4)2}{4x^2}$

$= \frac{4x^2 - 4x^2 + 2(x^2 - 4)}{4x^2}$

$= \frac{2x^2 - 8}{4x^2}$

5. en $x_+^* = 2$

$f'(2) = 0$ $\quad |0| < 1$ donc x_+^* est asymptotiquement stable

en $x_-^* = 0$

$f'(-2) = 0$ $\quad |0| < 1$ " " "

6. fait les dessins sur le graphe.