Année universitaire 2021-2022
Semestre 1

Licence Sciences pour la Santé

Niveau de licence :	**Première année**
Titre de l'enseignement :	**Mathématiques pour la Santé**
Nom des responsables :	**L. Pujo-Menjouet**
Date de l'épreuve :	**Mardi 14 décembre 2021**
Durée de l'épreuve	**45 minutes**

Documents et cours autorisés : OUI ☐ NON ☒

Préambule :
Indiquez sur la copie vos **NOM et PRÉNOM**. La justification des réponses et un soin particulier apporté à la présentation sont demandés et seront pris en compte lors de la notation.

Le sujet comporte 2 exercices indépendants.

Exercice 1. ***Question de cours*** *- 10 minutes - 4 points*

1. (2 points) Donner la définition d'une fonction strictement contractante.
2. (2 points) Énoncer le théorème du point fixe.

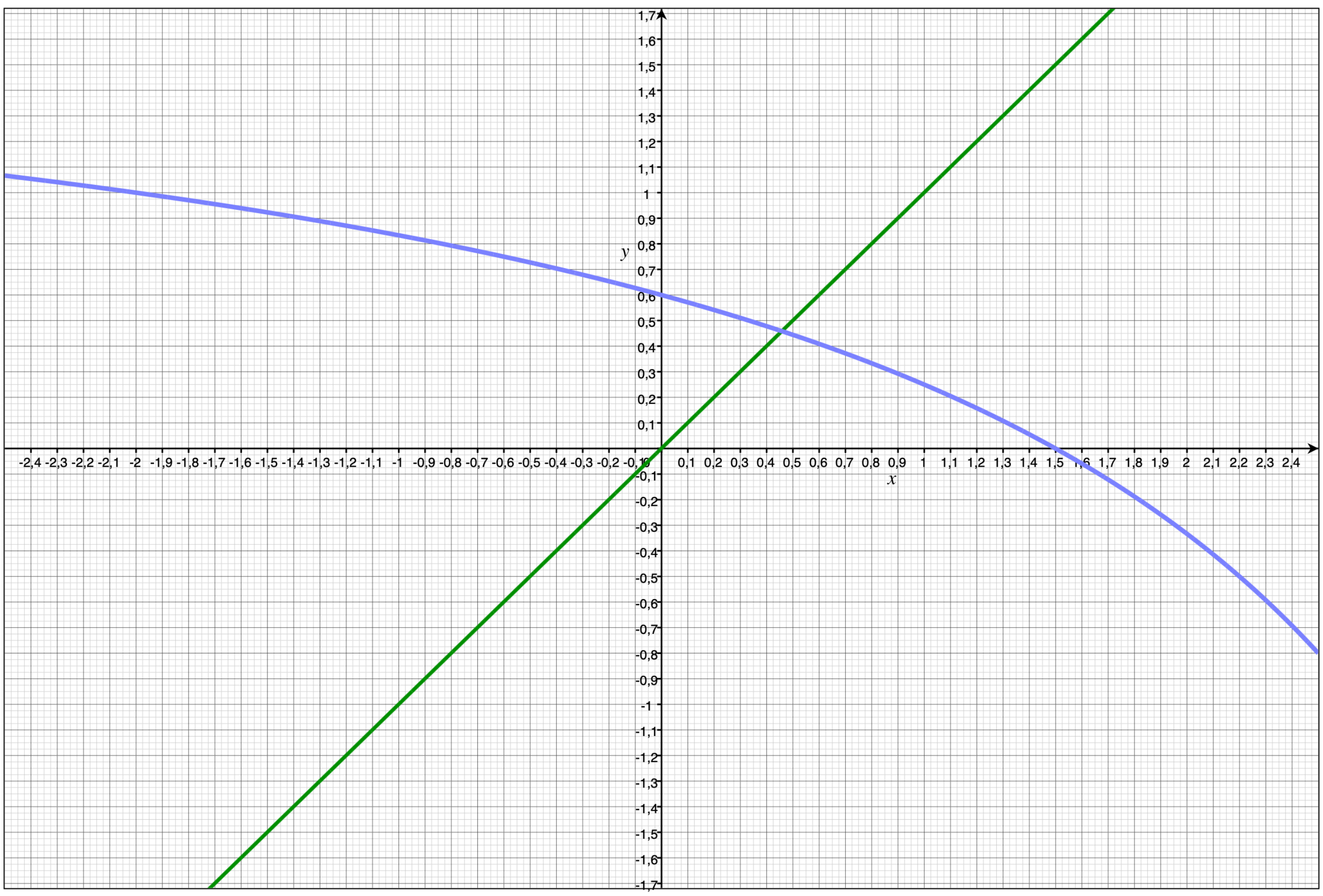
Exercice 2. *35 minutes - 6 points*

Considérons la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x+2}{x-5} + 1$

1. Quel est le domaine de définition de f ?
2. Expliquer pourquoi f est continue sur son domaine de définition ?
3. On considère $x \in [0,1]$.
   (a) Montrer que $f'(x) = \dfrac{-7}{(x-5)^2}$.
   (b) Expliquer pourquoi f est décroissante sur $[0,1]$.
   (c) Calculer $f(0)$ et $f(1)$. En déduire alors que $[0,1]$ est stable par f.
   (d) Montrer que $f''(x) = \dfrac{14}{(x-5)^3}$.
   (e) Montrer alors que f' est décroissante.
   (f) Calculer $f'(0)$ et $f'(1)$. Montrer alors que f est strictement contractante.
   (g) Que peut-on en déduire sur l'existence d'un point fixe ?
4. On définit maintenant la suite $(x_n)_{n \in N}$ par

$$(\mathscr{E}) \quad x_{n+1} = f(x_n), \text{ avec } n \in \mathbb{N} \text{ et } x_0 \in [0,1].$$

   (a) (Bonus) En utilisant une des questions précédentes, expliquer pourquoi cette suite est bien définie.
   (b) Expliquer pourquoi cette suite converge vers une limite l.
   (c) Calculer la valeur de cette limite.
   (d) (Bonus) montrer en utilisant un autre théorème du cours que la suite converge vers cette limite l.
   (e) Est-ce que cette suite est croissante ? Décroissante ? Autre ? Expliquer.
   (f) Tracer les premiers termes de la suite dans le graphe ci-dessous en prenant $x_0 = 0.1$. Il faudra identifier les courbes, les points fixes et tracer les premiers termes de la suite.



x
y

CONCOURS : ....

ÉPREUVE : ....

SECTION : ....

NOM : ....

Prénom : ....

Numéro candidat : ....

Note : /20

IL EST INTERDIT AU CANDIDAT DE SIGNER SA COPIE OU DE FAIRE APPARAÎTRE UN SIGNE DISTINCT QUELCONQUE

Observations du correcteur

Examen mathématiques pour la santé

14 décembre 2021

corrigé

Exercice 1.

1. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ avec $I \subset \mathbb{R}$ une fonction.

Dire que f est strictement contractante sur I signifie qu'il existe un réel k, avec $0 < k < 1$ t.q. pour tous $x, y \in I$

$|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$

2. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ avec $I \subset \mathbb{R}$ t.q.

① f est continue sur I

② I est stable par f (càd $f(I) \subset I$)

③ f est strictement contractante sur I

Alors f admet un unique point fixe l et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) \\ u_0 \text{ donné} \end{cases}$ converge vers l

Exercice 2

1. $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{5\}$

$\left(= \{x \in \mathbb{R} \, ; \, x-5 \neq 0\} \right)$

2. $f : x \mapsto \dfrac{x+2}{x-5} + 1$

or $\left.\begin{array}{l} x \mapsto x+2 \\ x \mapsto x-5 \end{array}\right\}$ sont continues sur $\mathbb{R}$, donc $x \mapsto \dfrac{x+2}{x-5}$ est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{5\}$.

D'autre part $x \mapsto 1$ est continue sur $\mathbb{R}$

donc f est continue sur $\mathcal{D}_f$ comme quotient et somme de fonctions continues.

3. Soit $x \in [0,1]$

a. $f(x) = \dfrac{x+2}{x-5} + 1$

soit $x \in \mathcal{D}_f$:

$$f'(x) = \frac{(x-5)-(x+2)}{(x-5)^2} = \frac{x-5-x-2}{(x-5)^2} = \frac{-7}{(x-5)^2}$$

b. $f'(x)$ est du signe de $\dfrac{-7 \to <0}{(x-5)^2 \to >0}$ <0 donc f est strictement décroissante

c. $f(0) = \dfrac{2}{-5} + 1 = \dfrac{-2+5}{5} = \dfrac{3}{5} < 1$

$f(1) = \dfrac{3}{-4} + 1 = \dfrac{-3+4}{4} = \dfrac{1}{4} > 0$

x	0		1
$f'(x)$		$-$	
f	$3/5$	$\searrow$	$1/4$

D'après ce qui précède $f([0,1]) = \left[\frac{1}{4} ; \frac{3}{5}\right] \subset [0,1]$

Donc $[0,1]$ est stable par f

d. $f''(x) = \dfrac{7.2}{(x-5)^3} = \dfrac{14}{(x-5)^3}$ $\quad \left(= -7.(x-5)^{-2} \to (-7).(-2)(x-5)^{-3} \times 1 \right.$

dérivée de $x-5$

$\left. = 14.(x-5)^{-3} \right)$

e. $x \in [0,1]$ $\quad 14 > 0$

et $0 < x < 1$

donc $-5 < x-5 < -4 < 0$

ainsi $(x-5)^3 < 0$

conclusion : $\dfrac{14}{(x-5)^3} < 0$ et donc $f'(x) < 0$ sur $[0,1]$ donc f est décroissante sur $[0,1]$

(f) $f'(x) = \dfrac{-7}{(x-5)^2}$

$f'(0) = \dfrac{-7}{25}$ $\qquad f'(1) = \dfrac{-7}{16}$

x	0		1
signe de $f''(x)$		$-$	
variation de f'	$-7/25$	$\searrow$	$-7/16$

donc $|f'(x)| = -f'(x)$

et $\max\limits_{x \in [0,1]} |f'(x)| = \dfrac{7}{16} < 1$ donc f est strictement contractante

g. Nous avons . f continue sur $[0,1] \subset D_f$

. $[0,1]$ stable par f

. f strictement contractante sur $[0,1]$

Donc f admet un unique point fixe $\ell \in [0,1]$.

(théorème du point fixe)

4. $\begin{cases} x_{n+1} = f(x_n) \\ x_0 \in [0,1] \end{cases}$

a. comme $x_0 \in [0,1]$ et $[0,1]$ est stable par f alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ $x_n \in [0,1] \subset D_f$

Donc la suite est bien défini

b. Comme f est strictement contractante, d'ap le 3.g.

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ avec $\ell = f(\ell)$

c. $\ell = f(\ell) \Leftrightarrow \ell = \dfrac{\ell+2}{\ell-5} + 1$, $\ell \in [0,1]$

$\Leftrightarrow \ell - 1 = \dfrac{\ell+2}{\ell-5}$

$\Leftrightarrow (\ell-1)(\ell-5) = \ell+2$

$\Leftrightarrow \ell^2 - 6\ell + 5 = \ell + 2$

$\Leftrightarrow \ell^2 - 7\ell + 3 = 0$

$\Delta = 49-12 = 37 > 0$

$\Delta = 37 > 36$

$\sqrt{37} > \sqrt{36} = 6$ donc $\ell_1 = \frac{7-\sqrt{\Delta}}{2} \simeq \frac{7-6}{2} \simeq \frac{1}{2} \in [0,1]$

$\ell_2 = \frac{7+\sqrt{\Delta}}{2} \simeq \frac{7+6}{2} \simeq \frac{13}{2} > 1$

donc $\boxed{\ell = \ell_1}$

d. comme on a vu que $\max_{x \in [0,1]} |f'(x)| < 1$

et comme $\ell \in [0,1]$

alors $|f'(\ell)| < 1$ donc ℓ est attractif et donc si u_n est "proche de ℓ" (ce qui est le cas ici) alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

e. Comme f est decroissante, la suite sera alternée

f. voir figure

Numéro de la feuille d'examen
à reporter ci-dessous :
N° 1

Licence sciences pour la santé
Examen session 1 - 15 DÉCEMBRE 2020 -
Mathématiques pour la santé

Correction

Exercice 1:

1. Un point x^* du domaine de définition de f est un point d'équilibre de l'équation $x_{n+1} = f(x_n)$ si c'est un point fixe de f c'est à dire que $f(x^*) = x^*$

2. On suppose $f'(x^*) \neq 1$ et $f'(x^*) \neq -1$

a. si $|f'(x^*)| < 1$ alors x^* est asymptotiquement stable

b. si $|f'(x^*)| > 1$ " " " instable

3. Si $f'(x) = 1$

a. Si $f''(x^*) = 0$ et $f'''(x^*) < 0$ alors x^* est asymptotiquement stable

b. Si $f''(x^*) \neq 0$ alors x^* est instable

Si $f''(x^*) = 0$ et $f'''(x^*) > 0$ alors x^* est instable

4. BONUS: Si $f'(x^*) = 1$
a. Si $-2f'''(x^*) - 3f''(x^*)^2 < 0$ alors x^* est asymptotiquement stable
b. Si " " > 0 alors x^* est instable

②

Exercice 2 : (E) $x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2-4}{2x_n}$

On pose $f : x \mapsto x - \frac{x^2-4}{2x}$

1. (E) ne s'écrit pas de la forme $x_{n+1} = a x_n + b$
donc (E) n'est pas linéaire

2. Supposons $x_0 \neq 0$ montrons P_n : "$x_n \neq 0$" pour tout $n \in \mathbb{N}$

- pour $n=0$: c'est vrai par hypothèse ($x_0 \neq 0$)

- supposons P_k vraie ($x_k \neq 0$) pour un certain entier k
montrons que P_{k+1} est vrai (c'est à dire $x_{k+1} \neq 0$)

or $x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^2-4}{2x_k} = \frac{2x_k^2 - x_k^2+4}{2x_k} = \frac{x_k^2+4}{2x_k}$ >0 $\neq 0$

$x_k^2+4 \geq 4 > 0$ donc $\neq 0$

Par conséquent $x_{k+1} \neq 0$

- Conclusion P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. $f(x) = x - \frac{x^2-4}{2x}$ les équilibres $x^* \in D_f$ et $x^* = f(x^*)$

ici $D_f = \mathbb{R}^*$ et $f(x^*) = x^* \Leftrightarrow x^* - \frac{x^{*2}-4}{2x^*} = x^*$

$\Leftrightarrow \frac{x^{*2}-4}{2x^*} = 0$

$\Leftrightarrow x^{*2} - 4 = 0$

$\Leftrightarrow (x^*-2)(x^*+2) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^* = 2 \\ \text{ou} \\ x^* = -2 \end{cases}$

Il existe donc 2 équilibres : $x_+^* = 2$ et $x_-^* = -2$

Numéro de la feuille d'examen
à reporter ci-dessous :
N° 3

4. Pour déterminer la stabilité de ces équilibres, déterminons :

$f'(x)$.

Soit $x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) = 1 - \dfrac{2x \cdot 2x - (x^2-4)2}{4x^2}$

$= \dfrac{4x^2 - 4x^2 + 2(x^2-4)}{4x^2}$

$= \dfrac{2x^2-8}{4x^2}$

5. en $x_+^* = 2$

$f'(2) = 0$ $\quad |0| < 1$ donc x_+^* est asymptotiquement stable

en $x_-^* = 0$

$f'(-2) = 0$ $\quad |0| < 1$ " " "

6. fait le dessin sur le graphe.

Numéro de la feuille d'examen
à reporter ci-dessous :
N° 1

Licence sciences pour la santé
Examen session 2 - ~~15 decembre 2020~~ - JUIN 2021
Mathematiques pour la santé

Exercice 1 (E_1) $x_{n+1} = x_n e^{r(1-\frac{x_n}{k})}$ $n \in \mathbb{N}$, r et $k > 0$

1. $f : x \mapsto x e^{r(1-x/k)}$ n'st pas de la forme $ax+b$
donc (E_1) n'st pas linéaire

2. $x^* \in D_f = \mathbb{R}$ et $x^* = f(x^*)$

or $x^* = f(x^*) \Leftrightarrow x^* = x^* e^{r(1-\frac{x^*}{k})}$

$\Leftrightarrow 1 = e^{r(1-x^*/k)}$ } en passant au ln de chaque coté

$\Leftrightarrow 0 = \underbrace{r}_{>0} (1 - \frac{x^*}{k})$

$\Leftrightarrow 1 - \frac{x^*}{k} = 0$

$\Leftrightarrow \boxed{x^* = k}$ un seul equilibre

3. Calculons $f'(x)$: soit $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = e^{r(1-x/k)} + x(\frac{-r}{k})e^{r(1-\frac{x}{k})}$

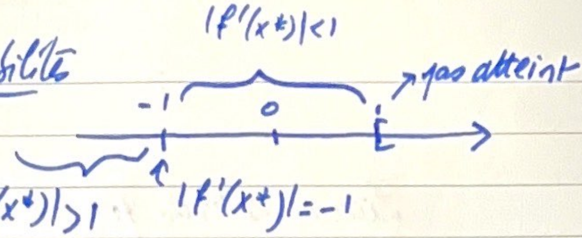
(rappel : $(e^{u(x)})' = u'(x)e^{u(x)}$ ici $u(x) = r(1-\frac{x}{k})$ et $u'(x) = \frac{-r}{k}$

en $x^* = k$ $f'(x^*) = f'(k) = e^{r(1-1)} + k(\frac{-r}{k}) e^{r(1-k/k)}$

$= 1 - r.1 = \boxed{1-r}$

avec $r>0$, $-r<0$ donc $\boxed{1-r<1}$

② On a plusieurs possibilités



ⓐ si $|1-r|<1$ càd $-1<1-r<1$

$\Leftrightarrow -2<-r<0$

$\Leftrightarrow \boxed{0<r<2}$

alors $|f'(x^*)|<1$ et $x^*=k$ est asymptotiquement stable

ⓑ si $|1-r|>1$ càd $\underbrace{1-r>1}_{\text{pas possible car } r>0}$ ou $1-r<-1$

alors $1-r<-1 \Leftrightarrow -r<-2$

$\Leftrightarrow \boxed{r>2}$ on a $|f'(x^*)|>1$ donc $x^*=k$ est instable

si $1-r=-1$ càd $\boxed{r=2}$

alors il faudrait calculer le signe de $-2f''(x^*)-3f'''(x^*)$

si <0 : x^* est asymptotiquement stable

si >0 : x^* est instable

(en bonus. le calcul de $-2f''(x^*)-3f'''(x^*)$ mais je ne le demandais pas)

Exercice 2 $\quad x_{n+1}=x_n-\dfrac{x_n^2-9}{2x_n}$, $n\in\mathbb{N}$

1. $f: x \mapsto x-\dfrac{x^2-9}{2x}$ n'est pas de forme $ax+b$ donc

(E_2) n'est pas linéaire

Numéro de la feuille d'examen
à reporter ci-dessous :
N° 3

2. Montrons que P_n: "$x_n \neq 0$" est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$

. P_0: "$x_0 \neq 0$" vrai par hypothèse

. On suppose P_k vrai pour un certain entier k
Montrons que P_{k+1} est vrai, c'est à dire que $x_{k+1} \neq 0$
Or :

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^2 - 9}{2x_k}$$

$$= \frac{2x_k^2 - x_k^2 + 9}{2x_k} = \frac{x_k^2 + 9 > 0}{2x_k \neq 0} \text{ donc } x_{k+1} \neq 0$$

P_{k+1} est vrai

. Conclusion: P_n est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$

3. x^* vérifie $x^* = f(x^*)$, $x^* \in D_f = \mathbb{R}$

$$f(x^*) = x^* \Leftrightarrow x^* - \frac{x^{*2} - 9}{2x^*} = x^*$$

$$\Leftrightarrow -\frac{x^{*2} - 9}{2x^*} = 0$$

$$\Leftrightarrow x^{*2} - 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^* - 3)(x^* + 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^* = 3 \text{ ou } -3$$

Il y a 2 équilibres possible: $x^*_+ = 3$ et $x^*_- = -3$

4. $$f'(x) = 1 - \frac{2x \cdot 2x - (x^2 - 9) \cdot 2}{(2x)^2}$$

$$= \frac{4x^2 - 4x^2 + 2(x^2 - 9)}{4x^2} = \frac{2x^2 - 18}{4x^2}$$

④ 5. $f'(3) = f'(-3) = 0$ or $|0| < 1$

donc x_-^+ et x_+^+ sont asymptotiquement stables

6. Faire le dessin sur le graphe.