



**Année universitaire 2021-2022  
Semestre 1**

**Licence Sciences pour la Santé**

Niveau de licence :	<b>Première année</b>
Titre de l'enseignement :	<b>Mathématiques pour la Santé</b>
Nom des responsables :	<b>L. Pujo-Menjouet</b>
Date de l'épreuve :	<b>Mardi 14 décembre 2021</b>
Durée de l'épreuve	<b>45 minutes</b>

Documents et cours autorisés :    OUI     NON

---

**Préambule :**

Indiquez sur la copie vos **NOM et PRÉNOM**. La justification des réponses et un soin particulier apporté à la présentation sont demandés et seront pris en compte lors de la notation.

---

Le sujet comporte 2 exercices indépendants.

**Exercice 1. Question de cours - 10 minutes - 4 points**

1. (2 points) Donner la définition d'une fonction strictement contractante.
2. (2 points) Énoncer le théorème du point fixe.

**Exercice 2.** 35 minutes - 6 points

Considérons la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \frac{x+2}{x-5} + 1$

1. Quel est le domaine de définition de  $f$  ?
2. Expliquer pourquoi  $f$  est continue sur son domaine de définition ?
3. On considère  $x \in [0, 1]$ .

(a) Montrer que  $f'(x) = \frac{-7}{(x-5)^2}$ .

(b) Expliquer pourquoi  $f$  est décroissante sur  $[0, 1]$ .

(c) Calculer  $f(0)$  et  $f(1)$ . En déduire alors que  $[0, 1]$  est stable par  $f$ .

(d) Montrer que  $f''(x) = \frac{14}{(x-5)^3}$ .

(e) Montrer alors que  $f'$  est décroissante.

(f) Calculer  $f'(0)$  et  $f'(1)$ . Montrer alors que  $f$  est strictement contractante.

(g) Que peut-on en déduire sur l'existence d'un point fixe ?

4. On définit maintenant la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par

$$(\mathcal{E}) \quad x_{n+1} = f(x_n), \text{ avec } n \in \mathbb{N} \text{ et } x_0 \in [0, 1].$$

- (a) (Bonus) En utilisant une des questions précédentes, expliquer pourquoi cette suite est bien définie.
- (b) Expliquer pourquoi cette suite converge vers une limite  $l$ .
- (c) Calculer la valeur de cette limite.
- (d) (Bonus) montrer en utilisant un autre théorème du cours que la suite converge vers cette limite  $l$ .
- (e) Est-ce que cette suite est croissante ? Décroissante ? Autre ? Expliquer.
- (f) Tracer les premiers termes de la suite dans le graphe ci-dessous en prenant  $x_0 = 0.1$ . Il faudra identifier les courbes, les points fixes et tracer les premiers termes de la suite.

