Année universitaire 2022-2023
Semestre 1

Licence Sciences pour la Santé

Niveau de licence :	**Première année**
Titre de l'enseignement :	**Mathématiques pour la Santé**
Nom des responsables :	**L. Pujo-Menjouet**
Date de l'épreuve :	**Mardi 7 décembre 2022**
Durée de l'épreuve	**45 minutes**

Documents et cours autorisés : OUI ☐ NON ☒

<u>**Préambule**</u> :
Indiquez sur la copie vos **NOM et PRÉNOM**. La justification des réponses et un soin particulier apporté à la présentation sont demandés et seront pris en compte lors de la notation.

Le sujet comporte 2 exercices indépendants.

<u>**Exercice 1.**</u> ***Question de cours*** *- 10 minutes - 4 points*

1. (1 points) Donner la définition d'un intervalle stable.
2. (1 points) Donner la définition d'un point fixe d'une fonction, ainsi que son interprétation graphique.
3. (2 points) Énoncer le théorème du point fixe.

Exercice 2. *35 minutes - 6 points*
Considérons la fonction f définie par $f(x) = x(x-1)(x+1)$

1. Quel est le domaine de définition de f ?
2. Expliquer pourquoi f est continue sur son domaine de définition ?
3. On considère $x \in I = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.
   (a) Montrer que $f'(x) = 3x^2 - 1$.
   (b) Expliquer pourquoi f est décroissante sur I.
   On rappelle $2 \geq \sqrt(3)$ donc $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{\sqrt(3)}$.
   (c) Calculer $f(\frac{1}{2})$ et $f(-\frac{1}{2})$. En déduire alors que I est stable par f.
   (d) Montrer que $f''(x) = 6x$.
   (e) Montrer alors que f' est décroissante sur $[-\frac{1}{2}, 0]$ et croissante sur $[0, \frac{1}{2}]$.
   (f) Montrer que $\max_{x/inI} |f'(x)| = 1$. Peut-on en déduire que f est strictement contractante ?
   (g) Que peut-on en déduire sur l'existence d'un point fixe par cette méthode ?
   (h) Par un calcul simple, montrer que $f(x) = x$ admet trois solutions : 0, $-\sqrt{2}$ et $\sqrt{2}$.
4. Nous ne nous intéressons ici qu'au point fixe 0. On définit maintenant la suite $(x_n)_{n \in N}$ par

$$(\mathscr{E}) \quad x_{n+1} = f(x_n), \text{ avec } n \in \mathbb{N} \text{ et } x_0 \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}].$$

   (a) Calculer $f'(0)$.
   (b) Expliquer pourquoi cette suite converge vers une 0 quand on prend $x_0 \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.
   (c) Calculer la valeur de cette limite.
   (d) Est-ce que cette suite est croissante ? Décroissante ? Autre ? Expliquer.
   (e) Sur la figure donnée dans le sujet : tracer les premiers termes de la suite en prenant $x_0 = \frac{1}{2}$. Il faudra aussi identifier les courbes, les points fixes et tracer les premiers termes de la suite.
5. BONUS : est-ce que les points fixes -1 et 1 sont attractifs ? Répulsifs ? Les suites autour de ces points sont-elles croissantes ? Décroissantes ? Autres ? Expliquer.


x
y

3 octobre 2023

Examen 2022

Exercice 2 : On a $f : x \mapsto x(x-1)(x+1)$

1. $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$

2. f est continue sur $\mathcal{D}_f$ comme produit de fonctions continues (polynômes)

3. Soit $x \in I = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$

   a. on a $f(x) = x(x-1)(x+1)$
   $= x(x^2-1) = x^3 - x$

   donc $f'(x) = 3x^2 - 1$

   b. Montrons que $f'(x) < 0$ sur $I = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$

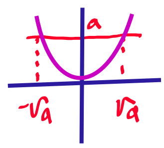
$f'(x) < 0 \iff 3x^2 - 1 < 0$

$\iff 3x^2 < 1$

$\iff x^2 < 1/3$

$\iff \frac{-1}{\sqrt{3}} < x < 1/\sqrt{3}$ ①

Rappel : $x^2 < a \iff -a < x < a$



D'autre part : $x \in [-1/2, 1/2]$ donc $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$

Mais d'après l'indication $1/2 < \frac{1}{\sqrt{3}}$ donc $-\frac{1}{2} > \frac{-1}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow \frac{-1}{\sqrt{3}} < \frac{-1}{2} \leq x \leq 1/2 < 1/\sqrt{3}$ ②

Par conséquent ① et ② nous permettent de dire que $f'(x) < 0$ sur $[-1/2, \frac{1}{2}]$

càd f strict. ↘ sur $[-1/2, 1/2]$

c. $f(1/2) = \frac{1}{2}(\frac{1}{2} - 1)(1/2 + 1) = \frac{1}{2}(-1/2)(3/2) = -3/8$

$f(-1/2) = -\frac{1}{2}(-1/2 - 1)(-1/2 + 1) = -\frac{1}{2}(-3/2)(\frac{1}{2}) = 3/8$

Tableau de variation de f'

x	$-1/2$	$1/2$

signe de $f'(x)$	$-$
variation de f	$3/8 \searrow -3/8$

$I = [-1/2, 1/2]$

On vient de montrer que si $x \in [-1/2, 1/2]$, alors $f(x) \in [-3/8, 3/8]$

or $3/8 < 4/8 = 1/2$ et $-3/8 > -4/8 > -1/2$

donc $[-3/8, 3/8] \subset [-1/2, 1/2]$

Conclusion : $f([-1/2, 1/2]) = [-3/8, 3/8] \subset [-1/2, 1/2]$ donc I est stable par f.

d. On a $f'(x) = 3x^2 - 1$ donc $f''(x) = 6x$

e. $f''(x) = 6x$ dépend du signe de x : si $x > 0$ $f''(x) > 0$

si $x < 0$ $f''(x) < 0$

si $x<0$ $\quad f''(x)<0$

donc sur $[-1/2, 0]$ $\quad f''(x)<0$, et donc f' est $\searrow$

sur $(0, 1/2)$ $\quad f''(x)>0$ $\quad f'$ est $\nearrow$

$f'(x) = 3x^2 - 1$

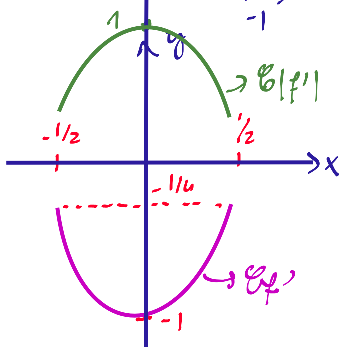
f. Tableau de variations de f'

x	$-1/2$		0		$1/2$
signe de $f''(x)$		$-$	0	$+$	
variations de f'	$-1/4$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$-1/4$

Calculons $f'(-1/2) = 3(-1/2)^2 - 1 = 3.\frac{1}{4} - 1 = -1/4$

$f'(1/2) = 3(1/2)^2 - 1 = 3.\frac{1}{4} - 1 = -1/4$

$f'(0) = 0 - 1 = -1$



$\max_{x\in[-1/2, 1/2]} |f'(x)| = 1$

f n'est pas strictement contractante

(car sinon on aurait $\max_{x\in[-1/2, 1/2]} |f'(x)| < 1$)

g. On a f continue sur I

on a I stable par f

Mais f n'est pas strictement contractante

} on ne peut pas appliquer le théorème du point fixe donc on ne peut pas conclure !

h. Calculons les points fixes de f

càd cherchons $x \in \mathbb{R}$ t.q. $f(x) = x$

$$f(x) = x \iff x(x-1)(x+1) = x$$

$$\iff x(x-1)(x+1) - x = 0$$

$$\iff x\left((x-1)(x+1) - 1\right) = 0$$

$$\iff x(x^2 - 1 - 1) = 0$$

$$\iff x(x^2 - 2) = 0$$

$$\iff x(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}) = 0$$

$$\iff x = 0 \text{ ou } x = \sqrt{2} \text{ ou } x = -\sqrt{2}$$

$a \geq 0$
$$x^2 - a = (x - \sqrt{a})(x + \sqrt{a})$$

__Remarque :__ $0 \in [-1/2, 1/2]$ Mais $1 < 2$ donc $\sqrt{1} < \sqrt{2}$

$\frac{1}{2} < \overset{\shortparallel}{1} < \sqrt{2}$ donc $\sqrt{2} \notin [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$

de même $-2 < -1$ donc $-\sqrt{2} < -\sqrt{1} = -1 < -\frac{1}{2}$ donc $-\sqrt{2} \notin [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$

en fait 0 est le seul point fixe $\in [-1/2, 1/2]$

4. $\begin{cases} x_{n+1} = f(x_n) \\ x_0 \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \end{cases}$ $\qquad f'(x) = 3x^2 - 1$

a. $f'(0) = -1$ Calculons $-2f'''(0) - 3\left(f''(0)\right)^2 = -2.6 - 3.0 = -12 < 0$

or $f''(x) = 6x$

$f'''(x) = 6$

donc 0 est attractif

b. Comme 0 est attractif, la suite converge vers 0

c. la limite vaut 0.

d. f est continue sur I et I est stable par f

De +, f est décroissante sur I

Conclusion la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est alternée

e.