



**Année universitaire 2022-2023
Semestre 1**

Licence Sciences pour la Santé

Niveau de licence :	Première année
Titre de l'enseignement :	Mathématiques pour la Santé
Nom des responsables :	L. Pujo-Menjouet
Date de l'épreuve :	Mardi 7 décembre 2022
Durée de l'épreuve	45 minutes

Documents et cours autorisés : OUI NON

Préambule :

Indiquez sur la copie vos **NOM et PRÉNOM**. La justification des réponses et un soin particulier apporté à la présentation sont demandés et seront pris en compte lors de la notation.

Le sujet comporte 2 exercices indépendants.

Exercice 1. Question de cours - 10 minutes - 4 points

1. (1 points) Donner la définition d'un intervalle stable.
2. (1 points) Donner la définition d'un point fixe d'une fonction, ainsi que son interprétation graphique.
3. (2 points) Énoncer le théorème du point fixe.

Exercice 2. 35 minutes - 6 points

Considérons la fonction f définie par $f(x) = x(x-1)(x+1)$

1. Quel est le domaine de définition de f ?
2. Expliquer pourquoi f est continue sur son domaine de définition?
3. On considère $x \in I = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.
 - (a) Montrer que $f'(x) = 3x^2 - 1$.
 - (b) Expliquer pourquoi f est décroissante sur I .
On rappelle $2 \geq \sqrt{3}$ donc $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$.
 - (c) Calculer $f(\frac{1}{2})$ et $f(-\frac{1}{2})$. En déduire alors que I est stable par f .
 - (d) Montrer que $f''(x) = 6x$.
 - (e) Montrer alors que f' est décroissante sur $[-\frac{1}{2}, 0]$ et croissante sur $[0, \frac{1}{2}]$.
 - (f) Montrer que $\max_{x \in I} |f'(x)| = 1$. Peut-on en déduire que f est strictement contractante?
 - (g) Que peut-on en déduire sur l'existence d'un point fixe par cette méthode?
 - (h) Par un calcul simple, montrer que $f(x) = x$ admet trois solutions : $0, -\sqrt{2}$ et $\sqrt{2}$.
4. Nous ne nous intéressons ici qu'au point fixe 0 . On définit maintenant la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par

$$(\mathcal{E}) \quad x_{n+1} = f(x_n), \text{ avec } n \in \mathbb{N} \text{ et } x_0 \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}].$$

- (a) Calculer $f'(0)$.
 - (b) Expliquer pourquoi cette suite converge vers une 0 quand on prend $x_0 \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.
 - (c) Calculer la valeur de cette limite.
 - (d) Est-ce que cette suite est croissante? Décroissante? Autre? Expliquer.
 - (e) Sur la figure donnée dans le sujet : tracer les premiers termes de la suite en prenant $x_0 = \frac{1}{2}$. Il faudra aussi identifier les courbes, les points fixes et tracer les premiers termes de la suite.
5. BONUS : est-ce que les points fixes -1 et 1 sont attractifs? Répulsifs? Les suites autour de ces points sont-elles croissantes? Décroissantes? Autres? Expliquer.

