Université Claude Bernard Lyon 1

Année universitaire 2020-2021
Semestre 2

Parcours d'Accés Spécifique à la Santé (PASS)

Niveau :	**Première année**
Titre de l'enseignement :	**Mineure disciplinaire mathématiques**
Nom des responsables :	**F. Oudin-Dardun / L. Pujo-Menjouet**
Date de l'épreuve :	**1er avril 2021**
Durée de l'épreuve	**120 minutes**

Documents et cours autorisés : OUI ☐ NON ☒

Préambule :
Indiquez à l'emplacement dédié sur la copie vos **NOM et PRÉNOM**; cachetez ensuite cette partie, puis reportez le numéro de la copie sur tous vos intercalaires.
La justification des réponses et un soin particulier apporté à la présentation sont demandés et seront pris en compte lors de la notation.
Documents et calculatrices ne sont PAS autorisés durant l'épreuve.
L'usage des téléphones, ordinateurs ou de tout autre objet connecté est prohibé.

Question de cours - 10 minutes - 2 points

1. (1 point) Énoncer la définition d'une famille génératrice dans un espace vectoriel E.
2. (1 point) Énoncer le théorème de la formule de Taylor-Lagrange.
3. (1 point) Énoncer le théorème de la formule de changement de variable pour le calcul d'une intégrale.

Exercice 1. *25 minutes - 4 points*
On considère :

$$G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : \quad x - y - z = 0 \text{ et } y + t = 0\}$$

un sous-ensemble de $\mathbb{R}^4$.

1. Montrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.
2. Déterminer une base et la dimension de G.
3. On considère le vecteur $b = (4, 1, 3, -1)$;
   b est-il un vecteur de G ?
   Si oui, exprimer les composantes de b dans la base trouvée à la question précédente.

Exercice 2. *35 minutes - 6 points*
Soit φ la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par : $\varphi(x, y) = (x + y, 2x)$.

1. (a) Montrer que φ est une application linéaire.
   (b) Écrire sa matrice M par rapport à la base canonique $\mathcal{B} = (e_i)_{i=1,2}$ de $\mathbb{R}^2$.
   (c) Déterminer le noyau de φ ; quelle est sa dimension ?
   (d) Déterminer l'image de φ ; quelle est sa dimension ?
2. (a) On considère la famille de vecteurs $\mathcal{B}' = (\epsilon_i)_{i=1,2}$ où $\epsilon_1 = (1, -2)$ et $\epsilon_2 = (1, 1)$.
   Montrer que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
   (b) Écrire la matrice Δ de φ par rapport à la base $\mathcal{B}'$.
   (c) Écrire la relation liant M et Δ, en utilisant une matrice inversible P et son inverse P^{-1}, que l'on explicitera.
   (d) Calculer M^{10} en utilisant Δ.

Exercice 3. *25 minutes - 4 points*
Donner le développement limité au voisinage de 0 et à l'ordre 2 de :

$$\sqrt{1 + 2\cos x}.$$

Exercice 4. *25 minutes - 4 points*
Résoudre l'équation différentielle suivante (en trouvant une solution particulière par la méthode de la variation de la constante) :

$$x(1 + \ln^2(x))y' + 2\ln(x)y = 1, \qquad \text{sur }]0; +\infty[.$$

Exercice 1 : $G=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 ;\ x-y-z=0 \text{ et } y+t=0\}$

1- Soit $X_1=(x_1,y_1,z_1,t_1)$ et $X_2=(x_2,y_2,z_2,t_2)$ dans G
et $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$.

$X_1\in G \Rightarrow x_1-y_1-z_1=0$ et $y_1+t_1=0$

$X_2\in G \Rightarrow x_2-y_2-z_2=0$ et $y_2+t_2=0$.

On considère : $\lambda X_1+\mu X_2=\lambda(x_1,y_1,z_1,t_1)+\mu(x_2,y_2,z_2,t_2)=(\lambda x_1+\mu x_2,\lambda y_1+\mu y_2,\lambda z_1+\mu z_2,\lambda t_1+\mu t_2)$.

On a : $(\lambda x_1+\mu x_2)-(\lambda y_1+\mu y_2)-(\lambda z_1+\mu z_2)=\lambda(x_1-y_1-z_1)+\mu(x_2-y_2-z_2)$
$=\lambda\ 0+\mu\ 0$ (par hypothèse sur X_1 et X_2)
$=0$

et $(\lambda y_1+\mu y_2)+(\lambda t_1+\mu t_2)=\lambda(y_1+t_1)+\mu(y_2+t_2)=\lambda\times 0+\mu\times 0=0$ (")

Donc : $\lambda X_1+\mu X_2\in G \Rightarrow G$ sous esp. vectoriel de $\mathbb{R}^4$

2- Soit $(x,y,z,t)\in G$; on a :
$x-y-z=0$ et $y+t=0 \Rightarrow z=x-y$ et $t=-y$.

Donc : $(x,y,z,t)=(x,y,x-y,-y)=x(1,0,1,0)+y(0,1,-1,-1)$.

En posant : $u=(1,0,1,0)$ et $v=(0,1,-1,-1)$
on a montré que $(x,y,z,t)=x\,u+y\,v$

Donc G est engendré par (u,v) et $G=\mathrm{Vect}(u,v)$

Or u et v non colinéaire, donc (u,v) est une base de G
et $\dim(G)=2$.

3- $b=(4,1,3,-1)$

- On a : $4-1-3=0$ et $1-1=0$ donc $b\in G$.
- Donc il existe x et $y\in\mathbb{R}$ tel que : $(4,1,3,-1)=x\,u+y\,v$

Et : $x u+y v=x(1,0,1,0)+y(0,1,-1,-1)=(x,y,x-y,-y)$
$=(4,1,3,-1)$

$\Rightarrow x=4$ et $y=1$ Et les composantes de b dans la base (u,v) sont : $\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$.

Exercice 2

$\varphi(x,y) = (x+y, 2x)$.

1-(a). Soit (x_1,y_1) et $(x_2,y_2) \in \mathbb{R}^2$, et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\varphi(\alpha(x_1,y_1)+\beta(x_2,y_2)) &= \varphi(\alpha x_1+\beta x_2, \alpha y_1+\beta y_2)\\ &= ((\alpha x_1+\beta x_2)+(\alpha y_1+\beta y_2), 2(\alpha x_1+\beta x_2))\\ &= (\alpha(x_1+y_1)+\beta(x_2+y_2), \alpha(2x_1)+\beta(2x_2))\\ &= (\alpha(x_1+y_1), \alpha(2x_1)) + (\beta(x_2+y_2), \beta(2x_2))\\ &= \alpha(x_1+y_1, 2x_1) + \beta(x_2+y_2, 2x_2)\\ &= \alpha\varphi(x_1,y_1)+\beta\varphi(x_2,y_2)\end{aligned}$$

Donc φ application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$

(b) $e_1 = (1,0)$ et $e_2 = (0,1)$

$\varphi(e_1) = \varphi(1,0) = (1,2)$ et $\varphi(e_2) = \varphi(0,1) = (1,0) = e_1 + 0e_2$

$= e_1 + 2e_2$

Donc $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

(c) $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \varphi(x,y) = (0,0)\}$

Pour $(x,y) \in \mathrm{Ker}(\varphi)$, on a $\varphi(x,y) = (0,0) \Rightarrow (x+y, 2x) = (0,0)$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ 2x=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ x=0 \end{cases}$$

Donc $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{(0,0)\}$ et $\dim(\mathrm{Ker}\,\varphi) = 0$.

(d) $\mathrm{Im}(\varphi) = \{(X,Y) \in \mathbb{R}^2 \mid$ il existe $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ avec $(X,Y) = \varphi(x,y)\}$

Et $(X,Y) = \varphi(x,y) \Rightarrow (X,Y) = (x+y, 2x) \Rightarrow \begin{cases} X = x+y \\ Y = 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = X - x = X - \frac{Y}{2} \\ x = Y/2 \end{cases}$

On a bien trouvé (x,y) pour tout (X,Y), donc $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathbb{R}^2$ et $\dim(\mathrm{Im}(\varphi)) = 2$

2- (a) $\varepsilon_1 = (1,-2)$ et $\varepsilon_2 = (1,1)$

$\mathcal{B}'$ a 2 vecteurs dans $\mathbb{R}^2$, qui est de dim 2,
donc on peut "juste" vérifier si $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ forme une famille libre
(pour avoir une base).

Or: $\alpha_1 \varepsilon_1 + \alpha_2 \varepsilon_2 = (0,0) \Rightarrow \alpha_1(1,-2) + \alpha_2(1,1) = (0,0)$

$$\Rightarrow (\alpha_1 + \alpha_2, -2\alpha_1 + \alpha_2) = (0,0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ -2\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ 3\alpha_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \end{cases}$$

Donc $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ libre, donc $\mathcal{B}'$ base de $\mathbb{R}^2$

(b) $\Delta = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(\varphi)$

On doit exprimer $\varphi(\varepsilon_1)$ et $\varphi(\varepsilon_2)$ dans la base $\mathcal{B}'$.

$\varphi(\varepsilon_1) = \varphi(1,-2) = (1-2, 2\times 1) = (-1, 2) = -(1,-2) = -\varepsilon_1$

$\varphi(\varepsilon_2) = \varphi(1,1) = (1+1, 2\times 1) = (2,2) = 2(1,1) = 2\varepsilon_2$

Donc: $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(\varphi) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

(c) Soit P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$;
alors: $\Delta = P^{-1} M P$

avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ et P^{-1} matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$.

Pour P^{-1}, on doit exprimer e_1 et e_2 en fonction de ε_1 et ε_2.

Or: $\varepsilon_1 = (1,-2) = e_1 - 2e_2$
$\varepsilon_2 = (1,1) = e_1 + e_2$

donc:
$\varepsilon_1 - \varepsilon_2 = -3e_2 \Rightarrow e_2 = -\frac{1}{3}\varepsilon_1 + \frac{1}{3}\varepsilon_2$
$\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 = 3e_1 \Rightarrow e_1 = \frac{1}{3}\varepsilon_1 + \frac{2}{3}\varepsilon_2$

et $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & -1/3 \\ 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$.

(d) $M^{10} = (P\Delta P^{-1})^{10} = P\Delta^{10}P^{-1} = P\begin{pmatrix} (-1)^{10} & 0 \\ 0 & 2^{10} \end{pmatrix} P^{-1}.$

Exercice 3

$\sqrt{1+\cos(x)}$.

⚠ $1+2\cos x \xrightarrow[x\to 0]{} 3$; on écrit donc :

$$1+2(\cos x-1)+2 = 3+2(\cos x-1)$$
$$= 3\left(1+\frac{2}{3}(\cos x-1)\right)$$

et $\sqrt{1+2\cos(x)} = \sqrt{3\left(1+\frac{2}{3}(\cos x-1)\right)} = \sqrt{3}\times\sqrt{1+\frac{2}{3}(\cos x-1)}$.

$$= \sqrt{3}\times\sqrt{1+X}$$

avec $X = \frac{2}{3}(\cos x-1)$.

- $\sqrt{1+X} = (1+X)^{1/2} = 1+\frac{1}{2}X+\frac{1}{2!}\left(\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}-1\right)\right)\times X^2+o(X^2).$

$$= \underbrace{1+\frac{1}{2}X-\frac{1}{8}X^2}_{P_2(X)}+o(X^2).$$

- $\frac{2}{3}(\cos x-1) = \frac{2}{3}\left(\left(1-\frac{1}{2!}x^2+o(x^2)\right)-1\right) = \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\right) = \underbrace{-\frac{1}{3}x^2}_{Q_2(X)}+o(x^2).$

Or : $P_2\circ Q_2(x) = 1+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}x^2\right)-\frac{1}{8}\left(-\frac{1}{3}x^2\right)^2 = \underbrace{1-\frac{1}{6}x^2}-\frac{1}{8}\times\frac{1}{3^2}x^4$

Et : $\sqrt{1+2\cos(x)} = \sqrt{3}\times\left(1-\frac{1}{6}x^2+o(x^2)\right) = \sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{6}x^2+o(x^2).$

Exercice 4

$$x(1+\ln^2(x))\,y' + 2\ln(x)\,y = 1$$

$$\Rightarrow \quad y' + \frac{2\ln x}{x(1+\ln^2(x))}\,y = \frac{1}{x(1+\ln^2 x)}.$$

Ici : $a(x) = \dfrac{2\ln x}{x(1+\ln^2(x))}$ et $b(x) = \dfrac{1}{x(1+\ln^2 x)}$

- ESSM : $y_0(x) = K e^{-A(x)}$ avec $A(x)$ primitive de $a(x)$.

Or : $\displaystyle\int \frac{2\ln x}{x(1+\ln^2(x))}\,dx = \int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}\,dx$ avec $\varphi(x) = \ln^2(x)+1$, $\varphi'(x) = \dfrac{2\ln(x)}{x}$

$$= \left(\ln(|\varphi(x)|)\right)$$

$$= \left(\ln(|\ln^2(x)+1|)\right) = \left[\ln(\ln^2(x)+1)\right)$$

et $y_0(x) = K e^{-\ln(\ln^2(x)+1)} = K e^{\ln\left(\frac{1}{\ln^2(x)+1}\right)} = K \times \dfrac{1}{\ln^2(x)+1}$ avec $K \in \mathbb{R}$.

- Solution Particulière : on cherche $y_1(x) = B(x)\,e^{-A(x)}$

où : $B(x)$ est une primitive de $b(x)\,e^{A(x)}$

Ici : $b(x)\,e^{A(x)} = \dfrac{1}{x(1+\ln^2(x))} \times e^{\ln(\ln^2(x)+1)} = \dfrac{1}{x(\ln^2(x)+1)} \times (\ln^2(x)+1)) = \dfrac{1}{x}$

et $B(x) = \ln|x| = \ln(x)$ (car sur $]0,+\infty[$)

Donc $y_1(x) = \ln(x) \times e^{-A(x)} = \ln(x) \times \dfrac{1}{\ln^2(x)+1}$.

- Solution générale : $y(x) = y_0(x) + y_1(x)$

COURS

→ Famille génératrice d'un ev E

Une famille $\mathcal{F} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ de vecteurs de E est génératrice si tout vecteur de E s'écrit comme CL des vecteurs de $\mathcal{F}$, c.à.d.

$\forall x \in E, \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tq : $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$

→ Th. de la formule de Taylor-Lagrange

Soit $a<b$, 2 réels, n un entier non nul, f une fonction de classe C^n sur $[a,b]$ et tq $f^{(n)}$ est dérivable sur $]a,b[$.

Alors, pour tout $x, x_0 \in [a,b]$, il existe $c \in]x_0, x[$ tq :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$$

→ Th. de la formule de changement de variable pour le calcul d'une intégrale

Soit $a<b$, $c<d$, 4 réels

f continue sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$

φ de classe C^1 sur $[c,d]$ et tq $\varphi([c,d]) \subseteq [a,b]$.

Alors : $$\int_c^d f(\varphi(t))\, \varphi'(t)\, dt = \int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} f(x)\, dx$$
