Année universitaire 2020-2021
Semestre 2

Parcours d'Accés Spécifique à la Santé (PASS)

Niveau :	**Première année**
Titre de l'enseignement :	**Mineure disciplinaire mathématiques**
Nom des responsables :	**F. Oudin-Dardun / L. Pujo-Menjouet**
Date de l'épreuve :	**1er avril 2021**
Durée de l'épreuve	**120 minutes**

Documents et cours autorisés : OUI ☐ NON ☒

Préambule :
Indiquez à l'emplacement dédié sur la copie vos **NOM et PRÉNOM**; cachetez ensuite cette partie, puis reportez le numéro de la copie sur tous vos intercalaires.
La justification des réponses et un soin particulier apporté à la présentation sont demandés et seront pris en compte lors de la notation.
Documents et calculatrices ne sont PAS autorisés durant l'épreuve.
L'usage des téléphones, ordinateurs ou de tout autre objet connecté est prohibé.

Question de cours - 10 minutes - 2 points

1. (1 point) Énoncer la définition d'une famille génératrice dans un espace vectoriel E.
2. (1 point) Énoncer le théorème de la formule de Taylor-Lagrange.
3. (1 point) Énoncer le théorème de la formule de changement de variable pour le calcul d'une intégrale.

Exercice 1. *25 minutes - 4 points*
On considère :

$$G = \big\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : \quad x - y - z = 0 \text{ et } y + t = 0\big\}$$

un sous-ensemble de $\mathbb{R}^4$.

1. Montrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.
2. Déterminer une base et la dimension de G.
3. On considère le vecteur $b = (4, 1, 3, -1)$;
   b est-il un vecteur de G ?
   Si oui, exprimer les composantes de b dans la base trouvée à la question précédente.

Exercice 2. *35 minutes - 6 points*
Soit φ la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par : $\varphi(x, y) = (x + y, 2x)$.

1. (a) Montrer que φ est une application linéaire.
   (b) Écrire sa matrice M par rapport à la base canonique $\mathcal{B} = (e_i)_{i=1,2}$ de $\mathbb{R}^2$.
   (c) Déterminer le noyau de φ ; quelle est sa dimension ?
   (d) Déterminer l'image de φ ; quelle est sa dimension ?
2. (a) On considère la famille de vecteurs $\mathcal{B}' = (\epsilon_i)_{i=1,2}$ où $\epsilon_1 = (1, -2)$ et $\epsilon_2 = (1, 1)$.
   Montrer que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
   (b) Écrire la matrice Δ de φ par rapport à la base $\mathcal{B}'$.
   (c) Écrire la relation liant M et Δ, en utilisant une matrice inversible P et son inverse P^{-1}, que l'on explicitera.
   (d) Calculer M^{10} en utilisant Δ.

Exercice 3. *25 minutes - 4 points*
Donner le développement limité au voisinage de 0 et à l'ordre 2 de :

$$\sqrt{1 + 2\cos x}.$$

Exercice 4. *25 minutes - 4 points*
Résoudre l'équation différentielle suivante (en trouvant une solution particulière par la méthode de la variation de la constante) :

$$x(1 + \ln^2(x))y' + 2\ln(x)y = 1, \qquad \text{sur }]0; +\infty[.$$