Année universitaire 2022-2023
Semestre 2

Parcours d'Accès Spécifique à la Santé (PASS)

Niveau :	**Première année**
Titre de l'enseignement :	**Mineure disciplinaire mathématiques**
Nom des responsables :	**F. Oudin-Dardun / L. Pujo-Menjouet**
Date de l'épreuve :	**23 février 2023**
Durée de l'épreuve	**120 minutes**

Documents et cours autorisés : OUI ☐ NON ☒

Préambule :
Indiquez sur la copie vos **NOM et PRÉNOM**. La justification des réponses et un soin particulier apporté à la présentation sont demandés et seront pris en compte lors de la notation.
Documents et calculatrices ne sont PAS autorisés durant l'épreuve.
L'usage des téléphones et ordinateurs est prohibé.

Question de cours. *30 minutes*

1. Énoncer sans le démontrer le théorème des accroissements finis.
2. Énoncer la définition d'une tautologie et donner un exemple.
3. Énoncer la définition d'une application continue (caractérisation de Weierstrass).
4. Énoncer sans la démontrer, la formule des racines nèmes d'un complexes quelconque .

Exercice 1. *30 minutes*

1. Déterminer les deux solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $9 - z^2 = 3z + 7i$.
2. Donner les 3 racines troisièmes de $-8i$ dans $\mathbb{C}$.

Exercice 2. *30 minutes*
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3 - x^2}{2}, & \text{si } x < 1, \\ \dfrac{1}{x}, & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

1. Représenter cette fonction sur un graphe.
2. Montrer que f est continue sur son ensemble de définition.
3. Montrer que$f$ est dérivable sur son ensemble de définition.
4. Montrer qu'il existe au moins un $c \in]0,2[$ tel que $f(2) - f(0) = 2f'(c)$. On prendra soin de bien énoncer le théorème utilisé ici.
5. **Bonus** : montrer que les valeurs possibles de c sont $1/2$ et $\sqrt{2}$.

Exercice 3. *30 minutes*
Soient a et b deux nombres réels tels que $0 < a < b$. On définit les suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $u_0 = a$, $v_0 = b$ et pour tout $n \geq 1$

$$u_n = \sqrt{u_{n-1} v_{n-1}}, \quad v_n = \frac{u_{n-1} + v_{n-1}}{2}.$$

1. Montrer que pour tous $x, y \geq 0$, $\sqrt{xy} \leq \dfrac{x+y}{2}$.
2. En déduire par une récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \geq u_n$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \geq 0$. Que peut-on en déduire pour la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} - v_n \leq 0$. Que peut-on en déduire pour la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
5. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n \leq v_0$. Que peut on en déduire sur la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
6. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_0 \leq u_n \leq v_n$. Que peut on en déduire sur la convergence de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
7. Montrer que si les deux suites sont convergentes, leurs limites sont égales.
8. **Bonus :** quelle propriété sur les suites aurait pu nous amener à ce dernier résultat ?