Année universitaire 2023-2024
Semestre 2

Parcours d'Accès Spécifique à la Santé (PASS)

Niveau :	**Première année**
Titre de l'enseignement :	**Mineure disciplinaire mathématiques**
Nom des responsables :	**F. Oudin-Dardun / L. Pujo-Menjouet**
Date de l'épreuve :	**jeudi 7 mars 2024**
Durée de l'épreuve	**120 minutes**

Documents et cours autorisés : OUI ☐ NON ☒

<u>Préambule</u> :
Indiquez sur la copie vos **NOM et PRÉNOM**. La justification des réponses et un soin particulier apporté à la présentation sont demandés et seront pris en compte lors de la notation.
Documents et calculatrices ne sont PAS autorisés durant l'épreuve.
L'usage des téléphones et ordinateurs est prohibé.

<u>Question de cours.</u> *20 minutes - 5 points*

1. Énoncer sans le démontrer le théorème de Rolle. L'illustrer graphiquement.
2. Énoncer la définition du critère de Cauchy pour une suite réelle.
3. Énoncer la définition d'une application continue (caractérisation de Weierstrass).
4. Énoncer sans la démontrer, la formule des racines nèmes de 1.

Exercice 1. *20 minutes - 3 points* Déterminer les deux solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation

$$z^2-(3+2i)z+5(1+i)=0.$$

Indication : on rappelle que $289=17^2$.

Exercice 2. *40 minutes - 6 points*

1. On considère l'application g définie pour tout $x\in\mathscr{D}_g=\mathbb{R}$ par

$$g(x)=e^x(x-1)+x^2.$$

   (a) Calculer la dérivée g' de g sur $\mathscr{D}_g$.
   (b) Déterminer les limites de g quand x tend vers $+\infty$ et $-\infty$.
   (c) Étudier le signe de $g'(x)$ sur $\mathscr{D}_g$ et dresser le tableau de variations de g sur $\mathscr{D}_g$.
   (d) Montrer que l'équation l'équation $g'(x)=0$ admet a comme unique solution sur $[0,+\infty[$.
   (e) Montrer que a se situe dans l'intervalle $I=[1/2;1]$.

2. On considère maintenant l'application f définie pour tout $x\in\mathscr{D}_f=[0,+\infty[$ par

$$f(x)=\frac{e^x}{e^x+x}.$$

   (a) Montrer que les équations $f(x)=x$ et $g(x)=0$ sont équivalentes sur $[0,+\infty[$.
   (b) En déduire que l'équation $f(x)=x$ admet a comme unique solution sur $[0,+\infty[$.
   (c) Calculer f' sur $\mathscr{D}_f$ et en déduire le sens de variation de f. Calculer la limite de f en $+\infty$. Dresser le tableau de variations de f.
   (d) **Bonus :** tracer le graphe de f.

Exercice 3. *40 minutes - 6 points* On considère deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par récurrence de la façon suivante

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_0 & = & 1, \\ u_{n+1} & = & \dfrac{u_n+2v_n}{3}, \quad n\in\mathbb{N}, \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{lcl} v_0 & = & 12, \\ v_{n+1} & = & \dfrac{u_n+3v_n}{4}, \quad n\in\mathbb{N}. \end{array}\right.$$

1. Montrer que $(v_n-u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $1/12$ dont il faudra préciser également le premier terme.
2. En déduire l'expression de la suite $(v_n-u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de n.
3. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
4. Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
5. Rappeler la propriété des suites adjacentes. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers une même limite que l'on note l.
6. On pose $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie pour tout $n\in\mathbb{N}$ par $w_n=3u_n+8v_n$.
   (a) Montrer que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite stationnaire.
   (b) Montrer que la limite l de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie $99=3l+8l$. En déduire la valeur de l.