



**Année universitaire 2024-2025
Semestre 2**

Parcours d'Accès Spécifique à la Santé (PASS)

Niveau :	Première année
Titre de l'enseignement :	Mineure disciplinaire mathématiques
Nom des responsables :	F. Oudin-Dardun / L. Pujo-Menjouet
Date de l'épreuve :	Jeudi 13 mars 2025
Durée de l'épreuve	120 minutes

Documents et cours autorisés : OUI ☐ NON ☒

Préambule :

Indiquez sur la copie vos **NOM et PRÉNOM**. La justification des réponses et un soin particulier apporté à la présentation sont demandés et seront pris en compte lors de la notation.

Documents et calculatrices ne sont PAS autorisés durant l'épreuve.

L'usage des téléphones et ordinateurs est prohibé.

Question de cours. *20 minutes - 5 points*

1. Énoncer sans le démontrer le théorème de Bolzano. L'illustrer graphiquement.
2. Énoncer la définition de limite finie pour une suite réelle convergente.
3. Énoncer sans les démontrer les lois de Morgan pour des prédicats.
4. Énoncer sans la démontrer, la formule des racines nèmes d'un complexe quelconque.

Exercice 1. 20 minutes - 3 points

1. On considère le nombre complexe suivant

$$z = \frac{-4}{1+i\sqrt{3}}.$$

- (a) Montrer que z peut s'écrire sous la forme $z = 2e^{i2\pi/3}$.
(b) En déduire l'expression des 6 racines 6ème de z .
2. (a) Donner la négation de la proposition suivante :

$$\forall y \in \mathbb{R}^*, \exists x \in \mathbb{R} \text{ tel que } x^2 - xy + y^2 = 0.$$

- (b) Déterminer (en le justifiant) laquelle, entre la proposition précédente et sa négation laquelle est vraie.

Exercice 2. 40 minutes - 6 points

On considère les applications f et g définies par

$$f(x) = e^{-x} + (1 - e^{-x}) \ln(1 - e^{-x}) \text{ et } g(x) = \ln(1 - e^{-x})e^x.$$

1. Déterminer les domaines de définition $\mathcal{D}_f$ et $\mathcal{D}_g$ de f et g .
2. Déterminer (en le justifiant) les variations de f et en déduire que pour tout $x > 0$, $f(x) > 0$.
3. Montrer que $g'(x) = \frac{e^x}{1 - e^{-x}} f(x)$.
4. En déduire les variations de g .
5. Déterminer les limites de g quand x tend vers 0^+ et $+\infty$.
Indication : on pourra poser $X = -e^{-x}$.
6. **Bonus :** tracer le graphe de g .

Exercice 3. 40 minutes - 6 points

Dans cet exercice, nous rappelons que $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n$ où n est un entier naturel non nul.

On considère deux suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définies de la façon suivante

$$u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}, \text{ et } v_n = u_n + \frac{1}{n!n}.$$

1. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est strictement croissante.
2. Montrer que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est strictement décroissante.
3. Déterminer la limite de $v_n - u_n$.
4. Rappeler la propriété des suites adjacentes. En déduire que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers une même limite.
5. Nous admettrons que leur limite commune est le nombre connu e . Le but de ce qui suit est de montrer que e est un irrationnel.

(a) Expliquer pourquoi pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n \leq e \leq v_n, \text{ puis } u_n \leq u_{n+1} \leq e \leq v_{n+1} \leq v_n.$$

(b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n < e < v_n.$$

(c) On suppose par l'absurde que $e = \frac{p}{q}$ où p et $q \in \mathbb{N}^*$. En vous servant des questions précédentes montrer que

$$u_q < \frac{p}{q} < u_q + \frac{1}{q!q}.$$

(d) En déduire que

$$q!qu_q < q!p < q!qu_q + 1.$$

Et que l'on aboutit à une contradiction. Conclure.