Université Claude Bernard Lyon 1 — Master 1 - Math. Appli. et Stat.
Semestre de printemps 2020-2021 — UE : Syst. Dyn. Printemps 2021

EXAMEN (3h00) en distanciel

Mercredi 14 avril 2021

Préambule :
Indiquez sur la copie vos **NOM et PRÉNOM**. La justification des réponses et un soin particulier apporté à la présentation sont demandés et seront pris en compte lors de la notation.

Le sujet comporte 5 exercices indépendants.

Exercice 1. *40 minutes - 5 points*
On considère le système non linéaire suivant :

$$(\mathscr{S}_1) \quad \begin{cases} x' &= a - x - \dfrac{4xy}{1+x^2}, \\ y' &= bx\left(1 - \dfrac{y}{1+x^2}\right). \end{cases}$$

où x, y sont définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ et a et b sont des réels positifs quelconques.

1. Déterminer analytiquement les isoclines nulles de $(\mathscr{S}_1)$. En donner une représentation graphique en prenant $a = b = 1$.
2. Tracer le champs de vecteur correspondant à $(\mathscr{S}_1)$.
3. Déterminer le ou les équilibres (x^*, y^*) de $(\mathscr{S}_1)$.
4. Calculer la nature et le type de (x^*, y^*) pour le système linéarisé en fonction des paramètres. Est-ce que (x^*, y^*) est hyperbolique ou pas ? Justifier votre réponse.
5. En déduire que nous sommes en présence d'un cycle limite pour certaines valeurs des paramètres a et b.

Exercice 2. *40 minutes - 5 points*
On considère le système non linéaire suivant en coordonnées polaire :

$$(\mathscr{S}_2)\ \begin{cases} r' &= ar + r^3 - r^5, \\ \theta' &= b + cr^2. \end{cases}$$

où a, b et c sont des réels quelconques.

1. Déterminer le ou les équilibres (x^*, y^*) de $(\mathscr{S}_2)$ en fonction des valeurs du paramètre a.
2. Montrer qu'il existe une bifurcation en $a = -1/4$. Quel est le type de cette bifurcation ?
3. Représenter graphiquement les orbites significatives correspondant à différentes valeurs de a.

Exercice 3. *30 minutes - 4 points*
On considère l'équation linéaire suivante :

$$(\mathscr{E}_1)\ x^{(4)} + x^{(3)} + ax^{(2)} + bx' + x = 0,$$

où x sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et tous les paramètres a et b sont des réels quelconques.

1. Montrer que l'on peut se ramener à un système d'équations différentielles d'ordre 1.
2. Montrer que pour étudier la stabilité asymptotique de l'équilibre trivial il est nécessaire d'étudier les racines du polynôme suivant :
$$P(\lambda) = \lambda^4 + \lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + 1.$$
3. En utilisant le critère de Routh-Hurwitz déterminer la région des paramètres a et b pour que cet équilibre trivial soit asymptotiquement stable.

Exercice 4. *30 minutes - 4 points*
On considère le système non linéaire suivant :

$$(\mathscr{S}_3)\ \begin{cases} x' &= y - 2x, \\ y' &= 2x - y - x^3. \end{cases}$$

où x, y sont définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1. Déterminer le ou les équilibres (x^*, y^*) de $(\mathscr{S}_3)$.
2. Déterminer leur nature (localement) et leur type.
3. On se propose maintenant de voir si l'équilibre trivial est globalement asymptotiquement stable.
   (a) On considère la fonction définie pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ par
   $$V(x, y) = (x + y)^2 + x^4/2.$$
   (b) Montrer que cette fonction V est une fonction de Lyapounov.
   (c) En déduire la stabilité globale de l'équilibre trivial de $(\mathscr{S}_3)$

<u>Exercice 5.</u> *40 minutes - 5 points*
On considère le système non linéaire suivant :

$$(\mathscr{S}_4) \quad \left\{ \begin{array}{lcl} x' & = & y, \\ y' & = & -\sin(x) - \varepsilon y, \end{array} \right.$$

où x, y sont définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et ε est un réel positif ou nul.

1. Montrer que si $\varepsilon = 0$ le système est conservatif.
2. Déterminer alors une fonction $(x,y) \mapsto E(x,y)$ qui montre cette conservation.
3. Montrer, en adaptant la fonction E précédente, que si $\varepsilon > 0$ le système devient dissipatif mais n'est pas gradient.
4. Déterminer alors l'allure des trajectoire vers les équilibres (nœuds, foyers, étoiles, etc.) et les tracer suivant les valeurs de ε.