Université Claude Bernard Lyon 1 — Master 1 - Math. Appli. et Stat.
Semestre de printemps 2022-2023 — UE : Syst. Dyn. Printemps 2023

Examen (2h)
Mercredi 26 avril 2023

Préambule :
Indiquez sur la copie vos **NOM et PRÉNOM**. La justification des réponses et un soin particulier apporté à la présentation sont demandés et seront pris en compte lors de la notation.

Le sujet comporte 3 exercices indépendants.

Exercice 1. *40 minutes - 7 points*
On considère le système suivant :

$$(\mathscr{S}_1)\quad \left\{\begin{array}{rcrcl} x_1' &=& -x_2 &+& x_1(1-(x_1^2+x_2^2))(4-(x_1^2+x_2^2)),\\ x_2' &=& x_1 &+& x_2(1-(x_1^2+x_2^2))(4-(x_1^2+x_2^2)), \end{array}\right.$$

1. Exprimer ce système avec les coordonnées polaires.
2. Montrer que l'on obtient le système suivant

$$\left\{\begin{array}{rcl} r' &=& r(1-r^2)(4-r^2).\\ \theta' &=& 1, \end{array}\right.$$

3. En définissant f pour tout $r \geq 0$ par $f(r) = r(1-r^2)(4-r^2)$, tracer le graphe de f.
4. En déduire les équilibres et leur stabilité.
5. À partir des questions précédentes, déterminer s'il y a un ou plusieurs cycles limites pour le système $(\mathscr{S}_1)$ et donner leur nature (stable, instable, ...).
6. Tracer ces cycles limites ainsi que quelques trajectoires significatives.

Exercice 2. *40 minutes - 7 points*
On considère le système linéaire suivant :

$$(\mathscr{S}_2)\quad \left\{\begin{array}{rcr} x' &=& ax+by,\\ y' &=& x-z,\\ z' &=& -x+y. \end{array}\right.$$

où x, y et z sont définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et a et b sont des réels quelconques.

1. Déterminer que l'équation caractéristique liée au système $(\mathscr{S}_2)$ s'écrit sous la forme

$$\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0, \text{ où } a_1,\ a_2 \text{ et } a_3 \text{ sont à déterminer.}$$

2. On pose $a_1 = -a$, $a_2 = 1 - b$ et $a_3 = -a - b$. En utilisant un critère du cours qu'il faudra rappeler
   (a) Donner des conditions sur a et b pour que l'équilibre soit asymptotiquement stable.
   (b) Représenter la zone de stabilité sur un plan d'abscisse a et d'ordonnée b.

Exercice 3. *40 minutes - 7 points*
La première tentative pour décrire de manière quantitative la dynamique de la transmission de la Malaria fut le modèle de Ross-Macdonald, qui est encore aujourd'hui à la base des études épidémiologiques sur la Malaria. Ce modèle, qui traduit les interactions entre les proportions d'individus infectés dans la population hôte (les hommes), et dans la population de vecteurs (les moustiques), est défini comme suit :

$$(\mathscr{S}_3)\quad \begin{cases} x' &= \left(\dfrac{abM}{N}\right) y(1-x) - rx, \\ y' &= ax(1-y) - \mu y, \end{cases}$$

où

— x est la proportion d'individus infectés dans la population humaine,
— y est la proportion d'individus infectés dans la population de moustiques,
— N est la taille de la population humaine,
— M est la taille de la population des moustiques femelles,
— $m = \dfrac{M}{N}$ est le nombre de femelles moustiques par homme hôte,
— a est le nombre de piqûres par unité de temps,
— b est la proportion de piqûres qui occasionnent effectivement la maladie,
— r est la vitesse de guérison d'un homme malade,
— μ est le taux de mortalité des moustiques.

1. Interpréter les termes de chacune des équations de $(\mathscr{S}_3)$.
2. Trouver les points d'équilibre du système.
3. Montrer que les conditions d'existence pour l'équilibre non trivial (strictement positif) est $R > 1$. On posera $\alpha = abm$ et $R = \dfrac{a\alpha}{\mu r}$
4. Exprimer le point d'équilibre non trivial (x^*, y^*) en fonction de R, a et μ.
5. Étudier la stabilité des points d'équilibre (nature et type).
6. Tracer les isoclines nulles ainsi que le sens des vecteurs vitesse, dans le cas où tous les points d'équilibre existent. En déduire un champ de vecteur.
7. Dessiner l'allure des trajectoires et interpréter biologiquement ce résultat.