INSA Lyon
Bât. Louis PASTEUR
11 Avenue Jean Capelle
69621 Villeurbanne

Bioinformatique et modélisation
3ème année
UE : Equations différentielles
et modélisation

Contrôle Final Écrit- EDO
4 novembre 2015

Avant propos.

La durée de l'examen est de 2h00. Aucun document et aucune calculatrice ne sont autorisés durant l'épreuve. L'usage des téléphones est prohibé.
La répartition en durée de chacun des exercices n'est qu'à titre indicatif. La justification des réponses et un soin particulier de la présentation seront demandés et pris en compte lors de la notation.

Question de cours (20 minutes) (8 points)

1. (4 points) Montrer que les solutions d'équations différentielles scalaires autonomes du premier ordre sont invariantes par translation.
2. (4 points)
   (a) Énoncer la définition d'équilibres hyperboliques et non hyperboliques pour un système linéaire autonome à coefficients constants de dimension 2.
   (b) Énoncer le théorème permettant d'obtenir deux systèmes linéaires autonomes à coefficients constants de dimension 2 topologiquement équivalents et donner les représentants canoniques des systèmes hyperboliques et non hyperboliques. Dessiner avec soin chacun de ces représentants.

Exercice 1 (40 minutes)(12 points)

Pour les deux systèmes suivants :

1. Trouver les valeurs propres et vecteurs propres associés.
2. En déduire les solutions générales pour des conditions initiales quelconques.
3. Tracer (avec soin) le portrait de phase des solutions dans les repères avant et après changement de base par les matrices de passage.

$$a)\left\{\begin{array}{rcrcr} \dot{x} & = & 10x & - & 5y, \\ \dot{y} & = & 8x & - & 12y, \end{array}\right. \quad b)\left\{\begin{array}{rcrcr} \dot{x} & = & -6x & + & 5y, \\ \dot{y} & = & -5x & - & 4y. \end{array}\right.$$

Exercice 2 (30 minutes)(8 points)

Considérons l'équation différentielle

$$(E_1) \quad \frac{dx}{dt} = rx - \frac{x}{1+x},$$

avec $x(t_0) = x_0$ et $r \in \mathbb{R}$.

1. Définir l'intervalle où les solutions existent.
2. Trouver les points d'équilibre x^* de l'équation différentielle (E_1) en fonction de r et les tracer sur le plan (r, x^*).
3. Considérons la fonction

   $$f : (r, x) \mapsto f(r, x) = rx - \frac{x}{1+x}.$$

   Montrer que $f(r, x)$ peut s'écrire sous la forme $f(r, x) = rx - 1 + \dfrac{a}{1+x}$, où a est une constante à déterminer. En déduire alors le nombre de points d'équilibre ainsi que leur nature (stable, instable, etc.) en fonction de r.
4. En vous servant des questions précédentes, dessiner le diagramme de bifurcation correspondant à (E_1). Identifier le type de bifurcation et dessiner quelques chroniques "représentatives" illustrant la question précédente.

Exercice 3 (30 minutes) (12 points)

On considère le système non linéaire suivant

$$(\mathscr{S}_4) \quad \left\{ \begin{array}{lllll} x'(t) & = & x(t) & - & y(t) \\ y'(t) & = & x(t)^2 & - & 4 \end{array} \right. , \quad t \in \mathbb{R}.$$

1. Montrer que pour tout $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, le problème de Cauchy

   $$\left\{ \begin{array}{lllll} x'(t) & = & x(t) & - & y(t), \qquad x(0) = x_0, \\ y'(t) & = & x(t)^2 & - & 4, \qquad\quad y(0) = y_0. \end{array} \right.$$

   admet une unique solution maximale, définie sur un intervalle ouvert I.
2. Montrer que le système $(\mathscr{S}_4)$ admet exactement deux équilibres, que l'on déterminera.
3. Etudier la stabilité de ces deux équilibres. Donner leur type.
4. *Esquisse du portrait de phase.* Faire figurer les éléments suivants sur une ébauche de portrait de phase pour le système $(\mathscr{S}_4)$:
   (a) les deux points d'équilibres,
   (b) les courbes le long desquelles le champ de vecteur est horizontal ou vertical,
   (c) quelques flèches représentant le champ de vecteur dans les zones délimitées par les courbes précédentes,
   (d) quelques orbites, au voisinage des points d'équilibre,
   (e) dans le cas d'un point selle, indiquer les directions remarquables au voisinage du point *(déterminer pour cela les vecteurs propres de la matrice jacobienne en ce point d'équilibre).*